



# PLANE TRIGONOMETRY,

BY

MAHAMAHOPADHYAYA PT. BAPUDEVA SASTRI, C. I. E.

---

EDITED WITH NOTES & EXERCISES &C

BY

PANDIT MURALIDHARA JHA J. A PROFESSOR,

GOVERNMENT SANSKRIT COLLEGE,

BENARES

---

PUBLISHED BY

SRI HARIKRISHNA DAS,

PROPRIETOR, 'GUPTA BOOK DEPOT',

KACHAURIGALI, BENARES CITY

---

*All Rights Reserved.*

---

1916

अथ

# सरलत्रिकोणमितिः ।

महामहोपाध्यायपण्डितबापूदेवशास्त्रिसंकलिता ।

काशीस्थ-गवर्नमेण्ट-संस्कृतपाठशालायां प्रधानगणितशास्त्राध्यापक-

ज्यौतिषाचार्यपण्डितश्रीभुरलीधरशर्माभिष्टिप्पण्यादिभिः

संवर्य्य संशोधिता ।



काशीस्थ-गुप्तबुक्कीपौस्वामिना श्रीहरिकृष्णदासेन  
निजव्ययतो मुद्रयित्वा प्रकाशिता ।



•

[अस्य सर्वेप्रधिकाराः प्रकाशकादधीकृताः]



*This form has been printed by*  
G. K. Gurjar at Shri Lakshmi Narayan Press, Benares City.

संवत् १९७२ ।

## भूमिका

.....

अस्तीह गणित-गोलादिविविधविषयपूरितः श्रुतिपथप्रदर्शी ज्यौ-  
तिषसिद्धान्तो भारतेऽन्यत्र च सुप्रसिद्धः सर्वेषां सिद्धविधानां पुरतः ।  
सोऽयं क्रमशः सुखबोधाय गणितलाघवादिमाश्रित्य लब्धात्माभ्यु-  
दय इदानीं वस्तुतोऽन्यान्यवेदाङ्गेषु शिथिलतां गतेष्वपि स्वचक्षुश्वा-  
रितार्थं विशेषतो भजत एव ।

यतः स्थविरतां लभमानस्यापि तस्यावलोकनसामर्थ्यवर्धकं  
यद्यर्थं नेत्रावरणमिवाभिनवाव्यक्तगणितज्यामितित्रिकोणमित्यादि  
विषयजातम् । येन चिरसाध्यमपि तज्ज्ञानं त्वचिरसिद्धमिवेत्यवगम्य  
त्रयाणां कोणानां मितिरित्यत्रोपचारात् त्रयाणां कोणानां मितेर्ज्ञापिका  
कृतिरिति सरला प्रथमा प्रथमतो ज्यौतिषशूद्धरणधुरीणैः सर्वज्यौ-  
तिषिकशिरोमणिभिः प्रियसिद्धान्तशिरोमणिभिर्महामहोपाध्यायैः श्री-  
मद्भिः पण्डित बापूदेवशास्त्रिभिरेव संकलय्य काश्यामेव ' मेडिकल-  
हॉल '—यन्त्रालयतः प्राकाशि ।

तत्समय एव विद्यमानैः सुप्रसिद्धसिद्धविधैर्ज्यौतिषसिद्धान्ततत्त्व-  
विवेकमर्मज्ञैर्मैथिलभूसुरैः श्रीमद्भिः पण्डितनीलाम्बरशर्मभिर्ज्ञोपाधिधै-  
र्विरचितः सरलत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितचापीयत्रिकोणमित्यादि-  
नानाज्यौतिषसिद्धान्तीयविषयवासना-विकाशो ' गोलप्रकाशो ' नाम  
ग्रन्थस्तैरेकोक्त्याङ्गभिः स्वसंशोधकत्वेनादृतस्तस्मिन्नेव यन्त्रालये  
प्रकाशितश्च ।

समयानुसारं सर्वत्र संस्कृतपरीक्षानियमे प्रस्तुते संप्रति विशे-  
षतो रेखागणितत्रिकोणमितिगोलीयरेखागणितादिग्रन्थाः पिपठिषुभिः

( २ )

सावधानतया ज्ञातुमभिलष्यन्ते तत्र धीजमेवाव्यक्तगणितं नव्यमव्यक्त-  
मेव बहुधाऽनः प्रथमं तदव्यक्तमेव प्रकाशयामिति मन्यमानोऽहमादौ  
सरलत्रिकोणमिति पुस्तकालामात् श्रेष्ठिना भा. हरिदासगुप्तात्मजेन  
श्रीहरिकृष्णदासगुप्तेन स्वीकृततन्मुद्रणव्ययादिना शोधयितुं प्रवर्तितो-  
ऽमूलम् ।

यद्यपि सूर्यसिद्धान्तार्यमटसिद्धान्तपञ्चसिद्धान्तिकावष्टफुटसि-  
द्धान्तादिष्वपि जीवाकोटिज्योत्कमज्यातो घनर्णतत्तज्जनितसंस्कारा-  
घवठोकनेन रेखागणितज्ञानमिवास्यापि ज्ञानं प्राचीनसमयादेवा-  
स्त्येवाऽयोऽपि पाश्चात्यगणितवित्संकठितां नानामिनवगणितवैचित्र्य-  
विप्रितां वृद्धीं तामेव सर्वां संकलय्य प्रकाशयितुमुत्कण्ठितोऽपि  
गुरुजनकृतिसमुद्धरणव्रतलिप्सयाऽन्तरायित एतामेव सरलत्रिको-  
णमिति संशोधयितुमारभेयम् ।

अत्र चत्वारोऽध्यायाः प्रक्रमपदवाच्याः सिद्धान्तनियथाश्च सन्ति  
यत्र स्थानविशेषे ब्रह्मगुप्त-भास्कराचार्यादीनां ज्याकोटिज्यावृत्तान्त-  
स्त्रिभुजचतुर्भुजफलवृत्तफलादिसाधननियामकाः श्लोका उपपद्यन्ते  
तत्र २ ते २ श्लोकाश्च प्रतिपदोक्ता वर्तन्ते मध्येऽध्यायासार्थं कतिपयाः  
प्रश्ना विशेषतश्चतुर्थाध्याये प्रघातमापकसंकेतेन कोणज्यादिमानसाधनं  
वेधतः स्थानान्तरितवृक्षपर्वतोच्छ्रितिनदीविस्तारादिज्ञापका ग्रन्थान्ते  
विंशतिः प्रश्नाश्च सुरक्षिताः ।

अत्र बहुत्र स्थलेषु यत्र २ जीवादिस्वरूपमात्रप्रदर्शनादेव प्रक-  
माह्नास्तत्र २ मया वाक्यतो वृद्धदक्षरैर्ज्ञापिताः । यत्र चास्मद्गुरुव-  
राणां ज्यौतिषभास्कराणां गणिताद्वितीयानां महामहोपाध्यायपण्डित-  
श्रीमत्सुधाकरद्विवेदिनां द्वित्रं पद्यमुपपद्यते तत्र २ टिप्पण्यां तदप्या-  
दृतं तथाऽध्यायासार्थं ग्रन्थमध्यस्थप्रश्नानामुत्तराणि च सुलभं दर्शितानि ।  
चतुर्थाध्यायस्य प्रघातमापकगणितावबोधकं नवीनगणितमप्यावश्यक-

त्वेन तत्र चतुर्थाध्यायात् प्रागेव निःक्षिप्तं तथा ग्रन्थान्ते रक्षितानां  
 विंशतेः प्रश्नानां सोपपत्तिकं कलासारण्यनुसारगणितप्रदर्शन—(लाग्रे-  
 थ्म = Logarithm ) लघुरिक्त्यगणितपूर्वकमुत्तरं चान्ते निवेश्य  
 सर्वान्ते कतिचन प्रश्नाश्चान्येऽभ्यासार्थं धृताः सन्ति । एवं यथाबुद्धि-  
 विभवं संशोध्यापि “ भ्रान्तिर्मनुष्यधर्मः ”—इति नराभिमानाज्ञानाद-  
 क्षिचापल्यदोषतोऽवश्यं त्रुटिभागद्वयमीक्ष्यं शुद्धान्तःकरणान् गणित-  
 सिद्धान्तविदुषो मुहुः प्रार्थये ।

श्रीमुरलीधरशा मैथिलः ।



पुस्तकप्राप्तिस्थानम्



श्रीहरिकृष्णदास,  
 मालिक, “गुप्तचुखीपो”  
 “कचोरीगली” बनारस सिटी ।

# शुद्धिपत्रम् ।



अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे पंक्तिः
मिष्टस्थाने	मिष्टस्थाने	५ १४
वमा + कव	कमा + कव	११ ४
$\left(\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	$\left(\frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^2$	१२ १३
—कोज्याक·ज्याक	—कोज्याअ·ज्याक	१८ १
कोज्या(अ-क)	कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ-क)	२१ १२
२कोज्या(अ+क)·ज्याअ- (अ-क)	२कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क)·ज्या $\frac{१}{२}$ - (अ-क)	२१ १३
त्रि <sup>२</sup> +	त्रि <sup>२</sup> +	२५ १
$\sqrt{\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}}$	$\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}$	३४ ३
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	३५ ५
$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}$	३५ ६
प्रक्रमस्य	प्रक्रमस्य	३६ २०
$\frac{२स(स-अ)}{२कग}$	$\frac{२स(स-अ)}{कग}$	४३ ८
$\frac{२(स-क)(स-ग)}{२कग}$	$\frac{२(स-क)(स-ग)}{कग}$	४३ १०
व्यासाधयो-	व्यासाधयो-	४८ १६
अ <sup>२</sup> + घ <sup>२</sup>	अ <sup>२</sup> + घ <sup>२</sup>	४६ १२
कोज्या <sup>२</sup> इंगा	कग·ज्या <sup>२</sup> इंगा	५३ १

अशुद्धम्	शुद्धम्	पृष्ठे	पंक्ति
२ज्या२आ	ज्या२आ	५३	१७
संख्याकर्ज-	संख्याकर्ज-	५५	११
ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ , कोज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$	ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न} \times$ कोज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$	५८	११
ज्या <sup>२</sup> अ + ज्या <sup>२</sup> अ	कोज्या <sup>२</sup> अ + ज्या <sup>२</sup> अ	७५	११
ज्या(६०° + अ)	ज्या(६०° + अ)	८५	२३
ईदं धनमूलहापकम्	ईदं धनमूलहापकम्	८८	१६
लघु १३३	लघु १३ <sup>१</sup>	९०	४
लघु १ = १, ०'१, ००'१	लघु १ = ०, ००'१, ०००'१	९१	१०
१० + प्रघाटअ	१० + प्रघाटअ	९७	१७
कामनं	कामानं	१०२	६
- प्रघाटज्याका	- प्रघाटकोज्याका	११६	१८
अघ <sup>२</sup> - अघ <sup>२</sup>	अच <sup>२</sup> - अघ <sup>२</sup>	११८	६
मसंभावं	मसंभवं	१२०	१५



अथ

# त्रिकोणमितिः ।

तत्र

प्रथमोऽध्यायः ।

—१०—

नत्वेभास्यं वक्ष्ये त्रिकोणमितिनामकं गणिततन्त्रम् ।

यदवगमाद्भूखस्थं वस्तु स्याद्गणयितुं सुशकम् ॥ १ ॥

परिभाषाः ।

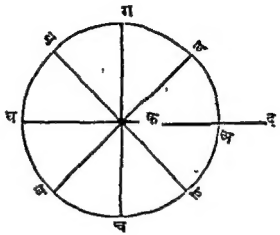
१ प्रक्रमः । त्रिकोणस्य त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति पदवयवा \* भवन्ति । तेषामवयवानामवगमकं तन्त्रं त्रिकोणमितिसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणगुणानां सम्यग्ज्ञाने कोणानां भुजैः साकं यः सम्बन्धस्तस्य भुजानां च सम्यग्ज्ञानादत्र कोणगुणा मुख्यत्वेन वर्ण्यन्ते ।

२ । संयुक्तैकमान्तयो रेखयोरन्योन्यप्रावण्यं क्षेत्रमितौ कोणशब्देन व्यवह्रियते किन्त्विह त्रिकोणमितौ संयुक्तैकमान्तयो रेखयोः संयुक्ताग्रे मियो दृढं बद्ध्वा पूर्वमेकां रेखामपरस्यां निधाय तस्यां निहितरेखायामेकस्मिन्नेव भूतले भ्रमितायां तद्रेखया यावान् प्रदेशोऽतिक्रम्यते तावान् कोणसंज्ञः स्याद् ।

ॐ त्रिभुजस्य फलमपीति सप्तावयवैर्भवितव्यम् ।



यथाऽत्र किल कद  
आधाररेखा । क रेखायोः  
संयोगविन्दुः । तथा  
कोणोत्पत्त्यै पूर्व या  
रेखा कद-रेखायां नि-  
धाय एकस्मिन्नेव भूतले  
भ्रान्यते सा कव । तदा-  
ऽस्या रेखाया भ्रमणे-  
न संजात अकव-  
कोणस्रैकोणमितिक  
वच्यते । क्षेत्रमिति-



सम्बन्धी कोणः समकोणद्वयादधिको न भवति परन्तु त्रिकोणमिति-  
सम्बन्धी ततोऽप्यधिको यथेष्टं महान् जायते । अथ यदि क-केन्द्रमभितः  
कख इष्टव्यासार्धेनैकम् अगच वृत्तं क्रियते तदा अकव-कोणसंमुख-  
चापः क्षेत्रमितावर्षपरिधेरधिको न भवति किन्त्वत्र स चापः परि-  
धेरप्यधिको यथेष्टं भवितुमर्हति ।

३ । क-विन्दौ यथापथा अकव-कोणो वर्धते तथातथा  
तत्संमुखचापो वर्धते । अतः प्रतिसमकोणसंमुखचापः परिधि-  
चतुर्थांशो भवति । अयमेव पदसंज्ञः ।

यथोर्ध्वक्षेत्रे अघ-व्यासे क-केन्द्रे गच-लम्बकरणेन संजातानां  
चतुर्णां समकोणानां संमुराः क्रमेण अग, गघ, घच, चअ चापाः  
पदाख्याः स्युः । अत एवैकस्मिन् पदे समकोणे च समाना एव नव-  
तितुल्या भागा अंशसंज्ञाः कल्प्यन्ते । तथोभयत्रैकैकस्मिन्नंशे षष्टिस्तु-  
ल्यभागाः कलासंज्ञाः कल्प्यन्ते । एकैकस्यां कलायां च षष्टिरेव तुल्य-  
भागा विकलाख्याः कल्प्यन्ते । अथैतेषामंशकलाविकलासंज्ञकभागानां  
मानसंख्याद्योतनाय तत्तत्संख्याङ्कोपरि दक्षिणभागे क्रमेण ' , ' , '  
एतानि चिह्नानि लिख्यन्ते । यथा पञ्चविंशतिरंशाश्चत्वारिंशत् कलाः  
पदपञ्चाशद्विकलाश्चैतेषां द्योतनाय २५, ४०, ५६ एवं लिख्यन्ते ।

४ । यदि केनचित् कोणेन तत्संमुखचापो लभ्यते तदा-  
ऽन्येन कोणेन किमित्यनुपातेन तत्संमुखचापो लभ्यत इति  
क्षेत्रमितौ षष्ठाध्याये त्रयस्त्रिंशी प्रतिज्ञोपपादिताऽस्ति तथैदम-  
वगम्यते ।

( १ ) कोणतत्संमुखचापयोरंशादिसंख्या समैव भवति ।

( २ ) निर्दिष्टचापदैर्घ्यात् तच्चापसंमुखकेन्द्रलग्नकोणस्यांशादि  
मानमवगन्तुं शक्यत इति ।

५ । ( २ प्रकमस्यक्षेत्रं द्रष्टव्यम् ) कद-आधाररेखामारभ्य  
कव-रेखाया भ्रमणेन संजातः अकव-कोणो यदा समकोणा-  
न्यूनो भवति तदा स आद्यसमकोणीय उच्यते तत्संमुखचा-  
पश्चाद्यपदीयः । यदा स कोण एकसमकोणादधिकः समकोण-  
द्वयान्यूनस्तदा स द्वितीयसमकोणीय उच्यते तत्संमुखाचापश्च  
द्वितीयपदीयः । एवमग्रेऽपि ।

६ । कद-आधाररेखातः कव-रेखा यथायथाऽनुलोमं  
भ्रमति तथातथा अकव-कोणो वर्धतेऽतः सा यथायथा विलोमं  
भ्रमेत् तथातथा स कोणो ह्रासमियादिति तु स्पष्टतरम् । अत  
एव चतुर्थसमकोणान्तःपाती अकव-कोण ऋणं भवति ।  
कव-रेखाया विलोमभ्रमेण तत्कोणोत्पत्तेः । अत एव तत्कोण-  
संमुखः अव-चापोऽपि ऋणं भवति ।

७ । यस्मात् कस्माच्चिदपि चापात् कोणाद्वा पदं समकोणो  
वा यावदतिरिच्यते तावती तच्चापस्य कोणस्य वा कोटिः स्यात् ।

यथा-(२ प्र०क्षे०द्र०) अव-चापस्य अकव-कोणस्य वा यव-चापः

वक्रग-कोणो वा कोटिः स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने नवतेः शोधिते तयोः कोटिमानमवशिष्यते । यथा— $23^{\circ}$ ,  $15'$ ,  $45''$  । अस्य कोटिः  $66^{\circ}$ ,  $48'$ ,  $15''$  ।

अनु० (१) नवत्यधिकस्य चापस्य कोणस्य वा कोटी ऋणं भवति ।

अनु० (२) जात्यत्र्यस्त्रे लघुकोणयोर्योगस्य नवतितुल्यत्वात् तयोरेकोऽपरस्य कोटिर्भवति ।

८ । यस्मात् कस्माच्चिच्चापात् कोणाद्वा परिध्यर्थं समकोणद्वयं वा यावताऽधिकं तावत् तच्चापस्य कोणस्य वा स्पर्धिसंज्ञं स्यात् ।

यथा—(२ प्र. क्षे. द्र.) अव-चापस्य अकव-कोणस्य वा वघ-चापः वक्रव-कोणो वा स्पर्धा स्यात् । अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने साशीतिशताच्छोधिते तयोः स्पर्धिचापकोणावशिष्येते ।

यथा— $55^{\circ}$ ,  $35'$ ,  $40''$  । अस्य स्पर्धा— $123^{\circ}$ ,  $28'$ ,  $20''$  ।

अनु० (१) साशीतिशताधिकस्य चापस्य कोणस्य वा स्पर्धा ऋणं भवति ।

अनु० (२) त्र्यस्रमात्रे कोणत्रययोगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् त्र्यस्त्रे एककोणस्यापरकोणद्वययोगः स्पर्धा भवति ।

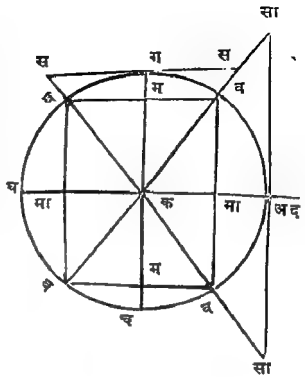
९ । अथ चापकोणयोः सम्बन्धिनः कतिचन पदार्थाः कथ्यन्ते । तत्र चापसम्बन्धिनः पदार्थाश्चापीया उच्यन्ते कोणसम्बन्धिनश्च कोणीयाः ।

जीवादिपरिमाणाः ।

(१) चापस्यैरुमान्ताद्व्यासं कृत्वा द्वितीयमान्तात् तद्व्यासोपरि कृतो लम्बस्तच्चापस्य ज्या स्यात् ।

यथा-कल्प्य० कद्-आधाररेखा । यस्या मूलं क-विन्दुः । तं केन्द्रं

कृत्वा कअ-इष्टव्या-  
सार्वेन अगघच वृ-  
त्तं कार्यम् । अघ  
गच व्यासौ च-मि-  
थो लम्बरूपौ विधे-  
यौ । तदा यदि अघ  
इष्टचापः स्यात् य-  
स्य एकममं अ-वि-  
न्दौ द्वितीयं च च-  
तुर्णां पदानामन्य-  
तमस्थान्तर्गतं स्या-  
त् तदा तस्य ज्या  
धमा भवेत् ।



( २ ) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्याने विन्दुं कृत्वा  
तस्मादपरस्यां कृतालम्बात् कोणेष्टविन्दुन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य  
ज्या स्यात् ।

यथा—अकघ-कोणोत्पादकयोः कद-कसा-रेखयोः कद-रेखायां  
कसा-रेखायाः य-विन्दोर्यदि धमा-लम्बः क्रियते तदा अकघ-कोणस्य

ज्या =  $\frac{\text{धमा}}{\text{कघ}}$  स्यात् । यदि सा-विन्दोः साअ-लम्बः क्रियते तदा अकघ-

कोणस्य ज्या =  $\frac{\text{साअ}}{\text{कसा}}$  स्यात् इयं पूर्वतुल्यैव ।

( ३ ) चापस्पर्शप्रमान्तात् कृते ज्यासे यो लम्बरूपोऽन्यो  
व्यासस्तस्मिन् चापापरप्रमान्तात् कृनो लम्बस्तच्चापस्य कोटि-  
ज्या स्यात् । तच्चापस्य या कोटिस्तस्या ज्येत्यर्थः । इयं ज्या-  
मूलस्य केन्द्रस्य चान्तरेण तुल्या भवति ।

यथा—अव-चापस्य वम कमा च कोटिज्या ।

( ४ ) कोणोत्पादकरेखयोः कस्यां बिदेकतरस्यां स्थिता-  
दिष्टविन्दोरपरस्यां कृतस्य लम्बस्य कोणविन्दोश्चान्तरात् कोणे-  
ष्टविन्दन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य कोटिज्या स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य कोटिज्या =  $\frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  स्यात् ।

( ५ ) चापस्यैकं प्रान्तं स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रापरप्रान्तलग्न-  
रेखावधिर्या रेखा सा तच्चापस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

( ६ ) कोणोत्पादकरेखयोरेकतरस्यामिष्टस्थाने विन्दुं  
प्रकल्प्य तस्मादपरस्यां कृतालम्बालम्बमूलकोणविन्दन्तरेणाप्तं  
तत्कोणस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य स्पर्शरेखा =  $\frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$  स्यात् ।

( ७ ) चापस्यैकमग्नं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तादुत्तं  
स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रचापापरप्रान्तलग्नरेखावधिर्या रेखा सा  
तच्चापस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य गस कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

( ८ ) कोणस्य स्पर्शरेखाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन  
यत् संपद्यते तत् कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—पूर्वसिद्धा अकव-कोणस्य स्पर्शरेखा =  $\frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$  ।

∴ अकव-कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा =  $\frac{\text{कमा}}{\text{वमा}} = \frac{\text{अक}}{\text{असा}}$  ।

( ९ ) चापस्यैकप्रान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः

केन्द्रान्निर्गता चापापरमान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य कसा छेदनरेखा ।

( १० ) कोणस्य कोटिज्याया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् कोणस्य छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य कोटिज्या  $= \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  ।

$\therefore$  छेदनरेखा  $= \frac{\text{कव}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{कअ}}$  ।

( ११ ) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदार्दि प्रकल्प्य तत्पदान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः केन्द्रान्निर्गता चापापरमान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य कस कोटिच्छेदनरेखा ।

( १२ ) कोणस्य जीवाया भाज्यहारयोः परिवर्त्तनेन यत् संपद्यते तत् तत्कोणस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात् ।

यथा—अकय-कोणस्य ज्या  $= \frac{\text{यमा}}{\text{कय}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$  ।

$\therefore$  कोटिच्छेदनरेखा  $= \frac{\text{कय}}{\text{यमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{असा}}$  ।

( १३ ) चापजीवामूलयोर्मध्ये यम्यासखण्डं तत् तच्चाप-स्योत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अव-चापस्य अमा उत्क्रमज्या स्यात् ।

( १४ ) कोणस्य कोटिज्ययोनं रूपं तत्कोणस्योत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य कोटिज्या  $= \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  ।

∴ उत्क्रमज्या  $= 1 - \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = 1 - \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$  ।

( १५ ) चापस्यैकमग्नं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तस्य कोटिमूलस्य च मध्ये यद्व्यासखण्डं तत् तच्चापस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् । यथा अव-चापस्य गम-कोट्युत्क्रमज्या ।

( १६ ) कोणस्य जीवया हीनं रूपं तत्कोणस्य कोट्युत्क्रमज्या स्यात् ।

यथा—अकव-कोणस्य ज्या  $= \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$  ।

∴ कोट्युत्क्रमज्या  $= 1 - \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = 1 - \frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$  ।

१० । यदि ( अ ) इदं कस्यचिच्चापस्य कोणस्य वा द्योतकं स्यात् तदाऽस्य ज्यादयः क्रमेणैवं लिख्यन्ते । ज्याअ, कोज्याअ, स्पअ, कोस्पअ, छेअ, कोछेअ, उअ, कोउअ । अत एव ज्याअ अस्य वर्गः  $= ( \text{ज्याअ} )^2$  । कोज्याअ अस्य घनः  $= ( \text{कोज्याअ} )^3$  इत्यादि स्यात् । परमत्र प्रायो लाघवार्थं ज्या<sup>२</sup>अ, कोज्या<sup>३</sup>अ इत्यादि, एवमेव लिख्यते । यद्यपि ज्या<sup>२</sup>अ इत्यादीनां स्थानविशेषेऽर्थोऽन्यथा कल्प्यते ।

११ । चापीयाः कोणीया वा जीवादयः पदविशेषे समकोण-विशेषे वा ऋणत्वं प्राप्नुवन्ति । यथा—( ९ प्र. श्ल. द्रष्टव्यम् ) अव-चापस्य वमा ज्या प्रथमद्वितीयपदयोर्धनगताऽस्ति किन्तु तृतीयचतुर्थपदयोर्दिग्वैपरीत्याऽऽणगता भवति । एवं अकव-

कोणस्यापि ज्या प्रथमद्वितीयसमकोणयोर्धनगता किन्तु तृतीयचतुर्थयोर्लम्बस्य दिग्वैपरीत्यादृणगता भवति ।

एवं प्रतिपदं प्रतिसमकोणं वा जीवादीनां प्रत्येकं धनर्णत्वं निश्चित्य सद्वगमायेदं चक्रं लिख्यते ।

पदाङ्काः समकोणाङ्का वा

चापीयाः कोणीया वा पदार्थाः	१	२	३	४
ज्या	+	+	-	-
कोटिज्या	+	-	-	+
स्पर्शरेखा	+	-	+	-
कोटिस्पर्शरेखा	+	-	+	-
छेदनरेखा	+	-	-	+
कोटिच्छेदनरेखा	+	+	-	-
उत्क्रमज्या	+	+	+	+
कोट्युत्क्रमज्या	+	+	+	+

क्षेत्रे छेदनकोटिच्छेदनरेखायोर्दिगानुलोम्यप्रातिलोम्ये न सम्यगुपलक्ष्येते अतस्तयोर्धनर्णत्वाद्वगमायान्यथा यत्न्यते ।

$$\therefore \text{कय} : \text{कमा} :: \text{कसा} : \text{कअ} \therefore \text{कसा} = \frac{\text{कय} \times \text{कअ}}{\text{कमा}}$$

अत्र यदि अद्य-चापस्य द्योतकं अ स्यात् ।

$$\text{तदा छेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{एवं कोछेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्याअ}}$$

एवं यदि अकय कोणस्य द्योतकं अ स्यात् । तदा—

$$\text{छेअ} = \frac{\text{यक}}{\text{कमा}} = \frac{१}{\text{कमा}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोछेअ} = \frac{\text{कय}}{\text{यमा}} = \frac{१}{\text{यमा}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}}$$



एतेन चापस्य कोणस्य वा छेदनकोटिच्छेदनरेखायोर्धनर्णत्वं क्रमेण कोटिज्याज्ययोरिव भवतीति स्फुटमवगम्यते ।

१२। प्रति समकोणादि कोणीयज्यादीनां मानं प्रतिपदादि चापीयज्यादीनां मानं वा नवमप्रक्रमस्थक्षेत्रदर्शनेन शीघ्रमवगम्यते ।

घालावयोधाय तद्विलिख्य प्रदर्श्यते ।

कोणीयाश्चापीया वा ज्यादयः	अ वा ०°	ग ९०°	घ १८०°	च २७०°
ज्या	०	१	०	-१
कोटिज्या	१	०	-१	०
स्पर्शरेखा	०	∞	०	∞
कोटिस्पर्शरेखा	∞	०	∞	०
छेदनरेखा	१	∞	-१	∞
कोटिच्छेदनरेखा	∞	१	∞	-१
चतुर्कमज्या	०	१	२	१
कोट्युत्तकमज्या	१	०	१	२

अत्र कव-त्रिज्यां रूपं प्रकल्प्य चापीयज्यादीनां मानं लिखितमस्तीति बोध्यम् ।

१३। अयं नवमप्रक्रमोक्तसंज्ञानां सम्यग्ज्ञानाय कोणीयज्यादीनां कतिचन मितः सम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते ।

( ९ प्र-क्षेत्रदर्शनम् ) कल्प्यते अ=अकव तदा—

$$( १ ) \quad ज्याअ = \frac{वमा}{कव} = \frac{वमा-घमा}{कव-वमा} = \frac{१}{कोछअ} ।$$

$$(२) \quad \text{कोज्याअ} = \frac{\text{कमा}}{\text{कव}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कमा}}{\text{कव} \div \text{कमा}} = \frac{१}{\text{छेअ}} ।$$

$$(३) \quad \text{स्पअ} = \frac{\text{वमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{वमा} \div \text{कव}}{\text{कमा} \div \text{कव}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$$

$$(४) \quad \text{कोस्पअ} = \frac{\text{कमा}}{\text{वमा}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{१}{\text{स्पअ}} ।$$

$$(५) \quad \text{छेअ} = \frac{\text{कव}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कव} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$(६) \quad \text{कोछेअ} = \frac{\text{कव}}{\text{वमा}} = \frac{\text{कव} \div \text{कव}}{\text{वमा} \div \text{कव}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} ।$$

$$(७) \quad \text{सअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}} ।$$

$$(८) \quad \text{कोसअ} = १ - \text{ज्याअ} = १ - \frac{१}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$(९) \quad \text{ज्या}^२\text{अ} + \text{कोज्या}^२\text{अ} = \left(\frac{\text{वमा}}{\text{कव}}\right)^२ + \left(\frac{\text{कमा}}{\text{कव}}\right)^२ \\ = \frac{\text{वमा}^२ + \text{कमा}^२}{\text{कव}^२} = \frac{\text{कव}^२}{\text{कव}^२} = १ ।$$

∴ ज्या<sup>२</sup>अ = १ - कोज्या<sup>२</sup>अ । कोज्या<sup>२</sup>अ = १ - ज्या<sup>२</sup>अ ।

१४ । अथ कोणीयज्यादीनां क्रमेण चापीयज्यादिभिर्यः  
संवन्धः सं प्रदर्शयते ।

यदि अ-कोणस्य संमुखचापः आ स्यात् तदा (९ प्र. क्षे. द्र. ) ।

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{वमा}}{\text{कव}} = \text{ज्याअ} \therefore \text{ज्याआ} = \text{त्रि. ज्याअ} ।$$

तत्र यदि त्रि = १ तदा ज्याआ = ज्याअ । एवं कोटिज्यादिष्वपि ।

अनेनेदमवगम्यते । कोणीयजीवादयो रूपव्यासार्धे चापीया भवन्ति । एवमिष्टव्यासार्धेन गुणितास्ता इष्टव्यासार्धे चापीया भवन्ति । एवं गुणविपर्ययेण चापीयाभ्यः कोणीया भवन्तीति ।

१५ । ( अनु० ) यदि कस्मिँश्चित् त्रिकोणमितिके राशौ समीकरणे वा स्थिताः कोणीया जीवादय इष्टव्यासार्धे चापीयत्वेनापेक्षितास्तदा तामु कोणीयज्यादिषु इष्टव्यासार्धमिते त्रिहरे कल्पिते ताश्चापीया भवन्ति ।

यथा—ज्या<sup>२</sup>अ + कोज्या<sup>२</sup>अ = १ अत्रत्यज्याकोटिज्ययोः क्रमेण

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}}, \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}} \text{ आभ्यामुत्थापितयोः}$$

$$\left( \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{त्रि}} \right)^2 + \left( \frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} \right)^2 = १, \text{ एवं सिद्धपति ।}$$

$\therefore$  ज्या<sup>२</sup>आ + कोज्या<sup>२</sup>आ = त्रि<sup>२</sup> । एवमत्र ज्याकोटिज्ये चापीये सिद्धे ।

## अध्यायः २

अत्र कोणानां योगान्तरज्यादिसाधनं ज्यादिसंबन्धयोगान्तरव-  
धफलानां मानानि चार्धांशज्याकोटिज्यानयनं ज्यादीनां मानानां वै-  
चित्र्यं निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पा-  
दनप्रकारश्चेति प्रोच्यते ।



∴ घच = टज, घट = जअ । एते त्रिभुजे, कटन, कवम त्रिभुजे  
चैतानि मिथः सजातीयानि भवन्ति ।

$$\text{एवं, } ज्याअ = \frac{वम}{कव} । ज्याक = \frac{घट}{कघ} = \frac{घट}{कव} ।$$

$$कोज्याअ = \frac{कम}{कघ} । कोज्याक = \frac{कट}{कघ} = \frac{कट}{कव} ।$$

$$\text{तथा । ज्या (अ+क) = } \frac{घट}{कघ} = \frac{घट}{कव} । ज्या (अ-क) = \frac{अग}{कअ} = \frac{अग}{कव} ।$$

$$\text{कोज्या (अ+क) = } \frac{कट}{कघ} = \frac{कट}{कव} । कोज्या (अ-क) = \frac{कग}{कअ} = \frac{कग}{कव} ।$$

$$\text{एवं, } घट = चट + घच = टन + घच ।$$

$$अग = टन - टज = टन - घच ।$$

$$कट = कन - टन = कन - चट ।$$

$$कग = कन + नग = कन + अज = कन + चट ।$$

$$\text{ततस्त्रिभुजसाजात्यात्, } \frac{टन}{कट} = \frac{वम}{कव} = \frac{चट}{घट} ।$$

$$\text{टन} = \frac{वम \cdot कट}{कव} । \quad \text{चट} = \frac{वम \cdot घट}{कघ} ।$$

$$\frac{घच}{घट} = \frac{कम}{कव} = \frac{कन}{कट} \cdot घच = \frac{कम \cdot घट}{कव} । \text{ तथा, कन} = \frac{कम \cdot कट}{कघ} ।$$

$$\text{तथा च, घट} = \frac{वम \cdot कट}{कव} + \frac{कम \cdot घट}{कव} \cdot \frac{घट}{कव} = \frac{वम \cdot कट}{कव} + \frac{कम \cdot घट}{कव} \cdot \frac{घट}{कव}$$

$$\text{अग} = \frac{\text{वम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} - \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{अग}}{\text{कव}} = \frac{\text{वम} \cdot \text{कट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} - \frac{\text{कम} \cdot \text{घट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} ।$$

$$\text{कट} = \frac{\text{कम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} - \frac{\text{वम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{कट}}{\text{कव}} = \frac{\text{कम} \cdot \text{कट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} - \frac{\text{वम} \cdot \text{घट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} ।$$

$$\text{काग} = \frac{\text{कम} \cdot \text{कट}}{\text{कव}} + \frac{\text{वम} \cdot \text{घट}}{\text{कव}} \cdot \frac{\text{काग}}{\text{कव}} = \frac{\text{कम} \cdot \text{कट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} + \frac{\text{वम} \cdot \text{घट}}{\text{कव} \cdot \text{कव}} ।$$

∴ ज्या (अ + क) = ज्याअ. कोज्याक + कोज्याअ. ज्याक । (१)

ज्या (अ - क) = ज्याअ. कोज्याक - कोज्याअ. ज्याक । (२)

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ. कोज्याक - ज्याअ. ज्याक । (३)

कोज्या (अ - क) = कोज्याअ. कोज्याक + ज्याअ. ज्याक । (४)

एतदानयनं क-कोणं अ-कोणाल्लघुं प्रकल्प्य (अ + क) कोणं च समकोणान्न्यूनं प्रकल्प्य कृतं किन्तु क-कोणस्य अ-कोणादाधिकत्वे (अ + क) कोणस्य च समकोणादधिकत्वे चौत्तरीत्या कोणैक्यान्तरज्याकोटिज्ये पूर्वसाधिते एव सम्पद्यते ।

१७ । अनु० । अनन्तरप्रक्रमस्य—( २, ४ ) समीकरणयोः यदि अ-कोणः शून्यं कल्प्येत तदा—

ज्या ( - क ) = - ज्याक । कोज्या ( - क ) = कोज्याक ।

अनेनेदमवगम्यते । ऋणगतकोणस्य ज्या ऋण भवति कोटिज्या च घन भवतीति ।

$$\text{अत एव स्प ( - क )} = \frac{\text{ज्या ( - क )}}{\text{कोज्या ( - क )}} = \frac{-\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}} = -\text{स्पक} ।$$

एवमेव कोस्प ( - क ) = -कोस्पक । छे ( - क ) = छेक ।

कोछे ( - क ) = - कोछेक । उ ( - क ) = उक ।

कोउ ( - क ) = २ - कोउक ।

१८ । अनु० । यदि १६ प्रक्रमे ( २, ४ ) अनयोरेव  
अ = १८०° स्युः । तदा—

ज्या (१८०°-क) = ज्या १८०° × कोज्याक - कोज्या १८०° × ज्याक ।  
( १२ प्र० ) = ० × कोज्याक + १ × ज्याक = ज्याक ।

कोज्या (१८०°-क) = कोज्या १८०° × कोज्याक + ज्या १८०° × ज्याक  
= - १ × कोज्याक + ज्या ० × ज्याक = - कोज्याक ।

अनेनेदमवगम्यते । कोणस्य ज्या तद्धीनसमकोणद्वयस्य ज्याया  
तुल्या भवति । कोणोनसमकोणद्वयस्य कोटिज्या च तत्कोणकोटिज्यया  
अणगतया तुल्या भवतीति ।

अत एव स्प (१८०°-क) =  $\frac{\text{ज्या}(१८०^{\circ}-क)}{\text{कोज्या}(१८०^{\circ}-क)} = \frac{\text{ज्याक}}{-\text{कोज्याक}} = -\text{स्पक} ।$

एवमेव कोस्प (१८०°-क) = -कोस्पक । छे (१८०°-क) = -छेक ।  
एवं : ज्या (अ+क) = ज्याअ . कोज्याक + कोज्याअ . ज्याक ।  
तथा कोज्या (अ+क) = कोज्याअ . कोज्याक - ज्याअ . ज्याक ।

∴ यदि अ = ९०° तदा ज्या (९०°+क) = कोज्याक ।

तथा कोज्या (९०°+क) = - ज्याक ।

एवं यदि अ = १८०° तदा ज्या (१८०°+क) = - ज्याक ।

कोज्या (१८०°+क) = - कोज्याक

१९ । षोडशप्रक्रमोक्तानि ( १, २, ३, ४ ), एतानि  
समीकरणानि यदीष्टव्यासार्थं चापीयान्यपेक्षितानि स्पुस्तदा  
( प्र० १५ ) रीत्या ।

$$\frac{\text{ज्या}(\text{अ} + \text{क})}{\text{त्रि}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\text{ज्या}(\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

$$\text{एवमेव ज्या}(\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

अत एव श्रीभास्कराचार्यः सिद्धान्तशिरोमणेःस्त्यज्योत्पत्तौ-

“चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथः कोटिज्यकाहते ।

त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं तच्चापैक्यस्य दोर्ज्यका ॥

चापान्तरस्य जीवा स्यात् तयोरन्तरसंपिता”-इति ।

$$\text{एवम् } \frac{\text{कोज्या}(\text{अ} + \text{क})}{\text{त्रि}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\therefore \text{कोज्या}(\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

$$\text{एवम् कोज्या}(\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{त्रि}} ।$$

अत एव श्रीकमलाकरभट्टस्तत्त्वविवेकस्पष्टाधिकारे ज्योत्पत्तौ-

“दोर्ज्ययोः कोटिमौन्योश्च घातौ त्रिज्याद्धृतौ तयोः ।

वियोगयोगौ जीवे स्तच्चापैक्यान्तरकोटिजे”-इति ॥

२० । अथ चापद्वययोगान्तरस्पर्शरेखादिस्वरूपम् ।

यतः

$$\text{ज्या}(\text{अ} + \text{क}) = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक} । (१)$$



ज्या ( अ - क ) = ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक । ( २ )

कोज्या ( अ + क ) = कोज्याअ . कोज्याक - ज्याअ . ज्याक । ( ३ )

कोज्या ( अ - क ) = कोज्याअ . कोज्याक + ज्याअ . ज्याक । ( ४ )

अतः (१) (२) अनयोः (३) (४) अनयोश्च पृथक् योगान्तराभ्याम्

ज्या ( अ + क ) + ज्या ( अ - क ) = २ ज्याअ . कोज्याक ।

ज्या ( अ + क ) - ज्या ( अ - क ) = २ कोज्याअ . ज्याक ।

कोज्या ( अ + क ) + कोज्या ( अ - क ) = २ कोज्याअ . कोज्याक ।

कोज्या ( अ - क ) - कोज्या ( अ + क ) = २ ज्याअ . ज्याक ।

एवम् ( १ ) ( २ ) अनयोर्वधतः

ज्या ( अ + क ) . ज्या ( अ - क ) = ज्या<sup>२</sup>अ . कोज्या<sup>२</sup>क - कोज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क

= ज्या<sup>२</sup>अ ( १ - ज्या<sup>२</sup>क ) - ( १ - ज्या<sup>२</sup>अ ) ज्या<sup>२</sup>क

= ज्या<sup>२</sup>अ - ज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>क + ज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क

= ज्या<sup>२</sup>अ - ज्या<sup>२</sup>क = ( ज्याअ + ज्याक ) ( ज्याअ - ज्याक )

= १ - कोज्या<sup>२</sup>अ - ( १ - कोज्या<sup>२</sup>क ) = कोज्या<sup>२</sup>क - कोज्या<sup>२</sup>अ

= ( कोज्याअ + कोज्याक ) ( कोज्याक - कोज्याअ ) ।

एवमेव (३) (४) अनयोर्वधतः कोज्या ( अ + क ) . कोज्या ( अ - क )

= कोज्या<sup>२</sup>अ . कोज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>अ . ज्या<sup>२</sup>क

= ( १ - ज्या<sup>२</sup>अ ) कोज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>अ ( १ - कोज्या<sup>२</sup>क )

= कोज्या<sup>२</sup>क - ज्या<sup>२</sup>अ = ( कोज्याक + ज्याअ ) ( कोज्याक - ज्याअ )

= १ - ज्या<sup>२</sup>क - १ + कोज्या<sup>२</sup>अ = कोज्या<sup>२</sup>अ - ज्या<sup>२</sup>क

= ( कोज्याअ + ज्याक ) . ( कोज्याअ - ज्याक ) ।

एवम् ( १ ) अस्मिन् ( २ ) अनेन मत्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या ( अ + क )}}{\text{ज्या ( अ - क )}} = \frac{\text{ज्याअ . कोज्याक + कोज्याअ . ज्याक}}{\text{ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक}} ।$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}} + \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}}{\frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}} - \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{\text{स्पअ} - \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पक} - \text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{१ + \text{कोस्पअ} \cdot \text{स्पक}}{१ - \text{कोस्पअ} \cdot \text{स्पक}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}$$

$$\text{एवमेव } \frac{\text{कोज्या (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ-क)}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पक} + \text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}$$

$$= \frac{१ - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}}$$

एवम् ( १ )-अस्मिन् ( ३ ) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\frac{\text{ज्या (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ+क)}} = \frac{\text{स्प (अ+क)}}{\text{कोज्या (अ+क)}} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}$$

$$= \frac{१ + कोस्पअ . स्पक}{कोस्पअ - स्पक} = \frac{स्पअ . कोस्पक + १}{कोस्पक - स्पअ} ।$$

एवमेव ( २ ) अस्मिन् ( ४ ) अनेन भक्ते लब्धम्

$$स्प(अ-क) = \frac{ज्याअ . कोज्याक - कोज्याअ . ज्याक}{कोज्याअ . कोज्याक + ज्याअ . ज्याक} = \frac{स्पअ - स्पक}{१ + स्पअ . स्पक} ।$$

२१ । ज्याकोटिज्ययोः स्वरूपान्तरं प्रदर्शयते ।

कल्प्यते अ = प + फ, क = प - फ,

∴ प = १/२ ( अ + क ), फ = १/२ ( अ - क ),

∴ ज्याअ = ज्या ( प + फ ) = ज्याप . कोज्याफ + कोज्याप . ज्याफ  
= ज्या १/२ ( अ + क ), कोज्या १/२ ( अ - क )

+ कोज्या १/२ ( अ + क ), ज्या १/२ ( अ - क ) = ( आ ) ।

एवमेव ज्याक

= ज्या १/२ ( अ + क ) . कोज्या १/२ ( अ - क )

- कोज्या १/२ ( अ + क ) . ज्या १/२ ( अ - क ) = ( का ) ।

कोज्याअ

= कोज्या १/२ ( अ + क ) . कोज्या १/२ ( अ - क )

, - ज्या १/२ ( अ + क ) . ज्या १/२ ( अ - क ) = ( गा ) ।

कोज्याक

= कोज्या १/२ ( अ + क ) . कोज्या १/२ ( अ - क )

+ ज्या १/२ ( अ + क ) . ज्या १/२ ( अ - क ) = ( घा ) ।

२२ । अनेन ज्ययोः कोटिज्ययोश्च योगान्तरे प्रदर्शयते ।

( आ ) ( का ) अनयो ( गा ) ( घा ) अनयोश्च पृथग्योगा-

न्तराभ्या सिद्धम्—

ज्याअ + ज्याक

$$= \text{ॐ } २ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (पा) ।$$

ज्याअ - ज्याक

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (फा) ।$$

कोज्याअ + कोज्याक

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (बा) ।$$

कोज्याक - कोज्याअ

$$= २ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ - क) = (भा) ।$$

( १ ) ( पा ) अस्मिन् ( फा ) अनेन भक्ते लब्धम्

$$= \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}} = \frac{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \cdot \text{कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}{२ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}$$

ॐ अत इष्टव्यासार्धे परिणामिते ज्याअ + ज्याक

$$= \frac{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}{\text{त्रि}} । \text{ ज्याअ} - \text{ज्याक}$$

$$= \frac{२ \text{ कोज्या } \frac{१}{२} (अ + क) \text{ ज्या } \frac{१}{२} (अ - क)}{\text{त्रि}} । \text{ अतः}$$

“चापविश्लेषयोगार्धजीवे कोटिज्यकाहते ।

मिथीस्त्रिज्याहते द्विज्यौ चापज्यावियुतिर्युतिः” ।

इति विशेषोक्तमुपपद्यते ।

† अत्रापीष्टव्यासार्धे परिणामनेन

“चापविश्लेषयोगार्धज्ययोः कोटिज्ययोर्हतिः ।

द्विगुणा त्रिगुणास्त च कोटिज्यावियुतिर्युतिः ” ॥

इदमपि विशेषोक्तमुपपद्यते ।

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})} \times \frac{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \text{रप } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \times \text{कोरप } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})$$

$$= \text{रप } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \times \frac{1}{\text{रप } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{रप } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{रप } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

(२) (वा) अस्मिन् (भा) भक्ते लब्धम्

$$= \frac{\text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोरप } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{कोरप } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})$$

$$(३) \text{पा-वा} = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}}$$

$$= \frac{2 \text{ ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}{2 \text{ कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})} = \text{रप } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})$$

$$(४) \text{फा-भा} = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{2 \text{ कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}{2 \text{ ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क}) \cdot \text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})}{\text{ज्या } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})} = \text{कोरप } \frac{1}{2} (\text{अ} + \text{क})$$

$$(५) पाःभा = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क}) ।$$

$$(६) काःधा = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}} = \text{स्प } \frac{1}{2} (\text{अ} - \text{क}) ।$$

२३ । व्यादिगुणितभुजांशंजीवाकोटिज्यादि प्रदर्श्यते ।

$$\therefore \text{ज्या} (न+१) \text{अ} = \text{ज्या} (\text{अन} + \text{अ}) \\ = \text{ज्याअन} \cdot \text{कोज्याअ} + \text{कोज्याअन} \cdot \text{ज्याअ} ।$$

$$\text{कोज्या} (न+१) \text{अ} = \text{कोज्या} (\text{अन} + \text{अ}) \\ = \text{कोज्याअन} \cdot \text{कोज्याअ} - \text{ज्याअन} \cdot \text{ज्याअ} ।$$

यदि न = १, २, ३, ... .. स्यात्

$$\text{तदा } (१) \text{ज्या } २ \text{अ} = २ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ} ।$$

$$(२) \text{कोज्या } २ \text{अ} = \text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^२ \text{अ} । \\ = १ - २ \text{ज्या}^२ \text{अ} = २\text{कोज्या}^२ \text{अ} - १ ।$$

$$(३) \text{ज्या } ३ \text{अ} = \text{ज्या } २ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ} + \text{कोज्या } २ \text{अ} \cdot \text{ज्याअ} \\ = २ज्याअ \cdot \text{कोज्या}^२ \text{अ} + \text{कोज्या}^२ \text{अ} \cdot \text{ज्याअ} - \text{ज्या}^२ \text{अ} \\ = ३ज्याअ \cdot \text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{ज्या}^३ \text{अ} = ३ज्याअ - ४\text{ज्या}^३ \text{अ} ।$$

$$(४) \text{कोज्या } ३ \text{अ} = \text{कोज्या } २ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ} - \text{ज्या } २ \text{अ} \cdot \text{ज्याअ} \\ = (२\text{कोज्या}^२ \text{अ} - १) \cdot \text{कोज्याअ} - २ज्या^२ \text{अ} \cdot \text{कोज्याअ} \\ = २\text{कोज्या}^२ \text{अ} - \text{कोज्याअ} - २\text{कोज्याअ} + २\text{कोज्या}^२ \text{अ} \\ = ४ \text{कोज्या}^२ \text{अ} - ३ \text{कोज्याअ}, \text{ इत्यादि ।}$$

२४ । द्विगुणज्याकोटिज्याप्रदर्शनं ततोर्ध्वांशज्या-  
कोटिज्यानपनं च ।

अनन्तरौक्तप्रक्रमस्यात् ( २ ) अस्मात्

$$२ ज्या^१अ = १ - कोज्या २ अ = \quad ( पा ) ।$$

$$२ कोज्या^१अ = १ + कोज्या २ अ = \quad ( फा ) ।$$

( १ ) यदि ( पा ) इदं ( फा ) अनेन द्रियते

$$तदा \frac{ज्या^१अ}{कोज्या^१अ} = स्प^१अ = \frac{१ - कोज्या २ अ}{१ + कोज्या २ अ} ।$$

( २ ) यदि ( पा ), ( फा ) अनयोः ( २अ ) ( इदम् ) ( अ ) अनेनोत्थाप्यते

$$\left. \begin{array}{l} तदा २ ज्या^१अ = १ - कोज्या २ अ \\ २ कोज्या^१अ = १ + कोज्या २ अ \end{array} \right\} एतयोः ( १५ ) प्रक्रमोक्तरीत्या इष्ट-  
ज्यासार्धे परिणामितयोः सिद्धम्$$

$$२ ज्या^१अ = त्रि^२ - त्रि . कोज्या २ अ = त्रि ( त्रि - कोज्या २ अ ) = ( ता ) ।$$

$$२ कोज्या^१अ = त्रि^२ + त्रि . कोज्या २ अ = त्रि ( त्रि + कोज्या २ अ ) = ( था ) ।$$

$$( ३ ) ( ता ) अस्मादिदमुत्पद्यते २ ज्या^१अ = \frac{२ त्रि^२ - २ त्रि . कोज्या २ अ}{२}$$

$$= \frac{ज्या^१अ + कोज्या^१अ + त्रि^२ - २ त्रि . कोज्या २ अ}{२} = \frac{ज्या^१अ + ( त्रि - कोज्या २ अ )^२}{२}$$

$$= \frac{ज्या^१अ + उ^१अ}{२}, \quad \therefore ज्या^१अ = \frac{१}{२} \sqrt{ज्या^१अ + उ^१अ}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्दलं तदर्धशकशिखिनी स्यात्”—इति ।

$$एवम् ज्या^१अ = \sqrt{\frac{१}{२} त्रि ( त्रि - कोज्या २ अ )} = \sqrt{\frac{१}{२} त्रि . उ अ} ।$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं तदर्धशकशिखिनी वा”—इति ।

( ४ ) यदि ( ता ), ( था ) अत्र ( अ ) वर्णः ( ९०° ± अ ) अनेनोत्थाप्यते

$$तदा २ ज्या^१अ ( ९०° + अ ) = त्रि^२ - त्रि . कोज्या ( ९०° ± अ )$$

$$= त्रि^२ ± त्रि . ज्या अ ।$$

$$\begin{aligned} २ \text{ कोज्या }^{\frac{१}{२}} (९०^{\circ} \mp \alpha) &= \text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \mp \text{त्रि} \cdot \text{कोज्या} (९०^{\circ} \mp \alpha) \\ &= \text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \pm \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ} । \end{aligned}$$

$$\text{ज्या } \frac{१}{२} (९०^{\circ} \mp \alpha) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \mp \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ}}{२}}$$

$$\text{कोज्या } \frac{१}{२} (९०^{\circ} \mp \alpha) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^{\frac{१}{२}} \pm \text{त्रि} \cdot \text{ज्याअ}}{२}}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“त्रिज्याभुजज्याहतिहीनयुक्ते त्रिज्याकृती तदलयोः पदे स्तः ।  
भुजोनयुक्तत्रिभखण्डयोज्ये कोटिं भुजज्यां परिकल्प्य चैवम्”—इति॥

२५ । ( २२ ) मन्त्रमस्थयोः ( फा ) ( भा ) अनयो-  
र्वर्गयोगे कृते सिद्धम् ।

$$\begin{aligned} &(\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^2 + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^2 \\ &= ४ \text{ कोज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) \cdot \text{ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \\ &\quad + ४ \text{ ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) \cdot \text{ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \\ &= ४ \text{ ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \{ \text{कोज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) + \text{ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha + \kappa) \} \\ &= ४ \text{ ज्या }^{\frac{१}{२}} (\alpha - \kappa) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ज्या } \frac{१}{२} (\alpha - \kappa) = \frac{१}{२} \sqrt{(\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})^2 + (\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ})^2}$$

एवमनेकधा ।

अस्मिन्निष्टव्यासार्धे परिणामितेऽपि विकारो न भवति । अत एव  
भास्कराचार्यः—

“यदोर्ज्ययोरन्तरमिष्टयोर्यत् कोटिज्ययोस्तत्कृतिपोगमूलम् ।  
दलीकृतं स्याद्भुजयोर्वियोगखण्डस्य जीवैवमनेकधा वा”—इति॥



२६ । अनन्तरप्रक्रमस्थसमीकरणे यदि (क) काणः  
(९०°-अ) अनेनोत्थाप्यते तदा—

$$\begin{aligned} \text{ज्या} \frac{1}{2} \{ \text{अ} - (९०^\circ - \text{अ}) \} &= \frac{1}{2} \sqrt{(\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2 + (\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ})^2}{2}} \text{ एवमनेकधा ।} \end{aligned}$$

अत एव भास्कराचार्यः—

“दोःकोटिजीवाविवरस्य वर्गो दलीकृतस्तस्य पदेन तुल्या ।  
स्यात् कोटिबाहोर्विवरार्धजीवा .....”—इति ।

२७ । भुजकोटिचापांशान्तरज्यानयनम् ।

१। (२४) प्रक्रमतः कोज्या२अ = १ - २ज्या²अ ।

अस्मिन्निष्टव्यासार्धे परिणामिते कोज्या२अ = त्रि -  $\frac{२ज्या²अ}{त्रि}$

वा कोज्या२अ = ज्या (९०°-२अ) = ज्या { (९०°-अ) - अ }  
= त्रि -  $\frac{ज्या²अ}{३त्रि}$  एवमनेकधा ।

अत एव श्रीभास्कराचार्यः—

“दोर्ज्याकृतिर्व्यासदलार्धमक्ता लब्धत्रिमौर्व्योर्विवरेण तुल्या ।  
दोःकोटिभागान्तरशिञ्जिनी स्यात् ....”—इति ।

२८ । अयं पूर्वोक्तार्धांशज्याकोटिज्ययो रूपान्तरानयनम् ।

“ १ = कोज्या²अ + ज्या²अ ।

एवम् ज्या२अ = २ ज्याअ . कोज्याअ

१ + ज्या२अ = कोज्या²अ + २ ज्याअ . कोज्याअ + ज्या²अ  
= (कोज्याअ + ज्याअ)² ।

$$१ - ज्या२ अ = कोज्या² अ - ज्याअ . कोज्याअ + ज्या² अ \\ = ( कोज्याअ - ज्याअ )²$$

$$\therefore कोज्याअ + ज्याअ = \pm \sqrt{१ + ज्या२ अ}$$

$$कोज्याअ - ज्याअ = \pm \sqrt{१ - ज्या२ अ}$$

$$(१) अत्र यदि २अ < ९०^{\circ} \therefore अ < ४५^{\circ}$$

तदा पूर्वसमीकरणमीदृक् स्यात्—

$$\left. \begin{aligned} कोज्याअ + ज्याअ &= \sqrt{१ + ज्या२ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= \sqrt{१ - ज्या२ अ} \end{aligned} \right\} \quad (पा)$$

$$(२) यदि २अ > ९०^{\circ} < १८०^{\circ} अतः अ > ४५^{\circ} < ९०^{\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} तदा कोज्याअ + ज्याअ &= \sqrt{१ + ज्या२ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= -\sqrt{१ - ज्या२ अ} \end{aligned} \right\} \quad (फा)$$

$$(३) यदि २अ > १८०^{\circ} < २७०^{\circ} \therefore अ > ९०^{\circ} < १३५^{\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} तदा कोज्याअ + ज्याअ &= \sqrt{१ - ज्या२ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= -\sqrt{१ + ज्या२ अ} \end{aligned} \right\} \quad (बा)$$

$$(४) यदि २अ > २७०^{\circ} < ३६०^{\circ} \therefore अ > १३५^{\circ} < १८०^{\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} तदा कोज्याअ + ज्याअ &= -\sqrt{१ - ज्या२ अ} \\ कोज्याअ - ज्याअ &= -\sqrt{१ + ज्या२ अ} \end{aligned} \right\} \quad (भा)$$

२ (५) (पा) (फा) अनयोः प्रत्येकयोगान्तरतः सिद्धम्

$$कोज्याअ = \frac{१}{२} (\sqrt{१ + ज्या२ अ} \pm \sqrt{१ - ज्या२ अ})$$

$$ज्याअ = \frac{१}{२} (\sqrt{१ + ज्या२ अ} \mp \sqrt{१ - ज्या२ अ}) .$$

अत्र यथा यथा नवत्यल्पः कोणः ४५ अंशेभ्यो न्यूनोऽधिको वा स्यात् तथा तथा प्रतिसमीकरणं द्वितीयपक्षस्यद्वितीयपदविहमूर्ध्वमधरं- वा बोध्यम् ।

२९ । शिष्यबुद्धिवैशद्यार्थमस्मिन् प्रक्रमे ज्यादीनां मानानां वैचित्र्यं प्रदर्श्यते (यच्च पूर्वोक्तप्रक्रमेभ्यः स्वल्पायासेनोत्पद्यते)

$$(१) \text{ को ज्याअ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}} = \text{कोज्याअ} \cdot \text{स्पअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}}$$

$$= \frac{\text{छेअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}}{\text{छेअ}}$$

$$(२) \text{ कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}}$$

$$(३) \text{ स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{छेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}$$

१, २, ३, ... .. इत्यादीनां वैशद्य मन्थान्ते द्रष्टव्यम् ।

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्प}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}}{१ - \text{उअ}} \quad !$$

$$(४) \text{कोस्पअ} = \frac{१}{\text{स्पअ}} = \sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ} - १}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{छेअ}}{\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{ज्या}^2\text{अ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{\text{छे}^2\text{अ} - १}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{स्प}^2\text{अ}} = \frac{१ - \text{उअ}}{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उ}^2\text{अ}}} \quad !$$

$$(५) \text{छेअ} = \sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोछेअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^2\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ}}{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ} - १}} = \frac{\text{स्पअ} \cdot \text{कोछेअ}}{१ - \text{उअ}} \quad !$$

$$(६) कोछेअ = \sqrt{१ + कोस्प^२अ} = \frac{१}{ज्याअ} = \frac{छेअ}{स्पअ}$$

$$= \frac{कोस्पअ}{कोज्याअ} = \frac{१}{कोज्याअ \cdot स्पअ} = \frac{स्पअ \cdot कोस्पअ}{ज्याअ}$$

$$= \frac{कोज्याअ \cdot छेअ}{ज्याअ} = \frac{१}{\sqrt{१ - कोज्या^२अ}} = \frac{\sqrt{१ + स्प^२अ}}{स्पअ}$$

$$= \frac{छेअ}{\sqrt{छे^२अ - १}} = कोस्पअ \cdot छेअ = \frac{१}{\sqrt{२ उअ - उ^२अ}}$$

$$(७) उअ = १ - कोज्याअ = १ - \sqrt{१ - ज्या^२अ}$$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + स्प^२अ}} = १ - \frac{कोस्पअ}{\sqrt{१ + कोस्प^२अ}}$$

$$= १ - \frac{१}{छेअ} = १ - \frac{\sqrt{कोछे^२अ - १}}{कोछेअ}$$

३०. अस्मिन् प्रक्रमे कोणस्य ज्यादिभ्यो द्विगुणस्य तत्कोणस्य ज्यादीनां मानानि प्रदर्श्यन्ते ।

$$(१) ज्या२अ = २ज्याअ \cdot कोज्याअ = \frac{२ज्या^२अ}{स्पअ} = \frac{२कोज्या^२अ}{कोस्पअ}$$

$$= \frac{२ज्याअ}{छेअ} = \frac{२कोज्याअ}{कोछेअ} = \frac{२स्पअ}{१ + स्प^२अ} = \frac{२स्पअ}{छे^२अ}$$

$$= \frac{२}{स्पअ + कोस्पअ} = \frac{२कोस्पअ}{१ + कोस्प^२अ} = \frac{२कोस्पअ}{कोछे^२अ} ।$$

$$(२) कोज्या२अ = कोज्या^२अ - ज्या^२अ = १ - २ ज्या^२अ$$

$$= २कोज्या^२अ - १ = \frac{१ - स्प^२अ}{१ + स्प^२अ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{कोस्पअ + स्पअ}$$

$$= \frac{कोस्प^२अ - १}{कोस्प^२अ + १} = \frac{२ - छे^२अ}{छे^२अ} = \frac{२कोज्याअ - छेअ}{छेअ}$$

$$= \frac{कोछे^२अ - २}{कोछे^२अ} = \frac{कोछेअ - २ज्याअ}{कोछेअ} ।$$

$$(३) स्प२अ = \frac{२स्पअ}{१-स्प^२अ} = \frac{२}{कोस्पअ - स्पअ} = \frac{२ज्याअ . कोज्याअ}{१ - २ज्या^२अ}$$

$$= \frac{२ज्याअ . कोज्याअ}{२कोज्या^२अ - १} = \frac{२कोस्पअ}{कोस्प^२अ - १} = \frac{२स्पअ}{२ - छे^२अ} = \frac{२कोस्पअ}{कोछे^२अ - २} ।$$

$$(४) कोस्प२अ = \frac{१-स्प^२अ}{२स्पअ} = \frac{कोस्प^२अ - १}{२कोस्पअ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{२}$$

$$= \frac{१-२ज्या^२अ}{२ज्याअ . कोज्याअ} = \frac{२कोज्या^२अ - १}{२ज्याअ कोज्याअ} = \frac{२-छे^२अ}{२स्पअ}$$

$$= \frac{कोछे^२अ - २}{२कोस्पअ} ।$$

$$(५) छे२अ = \frac{छे^२अ}{२-छे^२अ} = \frac{छेअ}{२कोज्याअ - छेअ} = \frac{१}{२कोज्या^२अ - १}$$

$$= \frac{१}{१-२ज्या^२अ} = \frac{१+स्प^२अ}{१-स्प^२अ} = \frac{कोस्पअ+स्पअ}{कोस्पअ-स्पअ} = \frac{कोस्प^२अ+१}{कोस्प^२अ-१}$$

$$= \frac{कोछे^२अ}{कोछे^२अ-१} ।$$

$$(६) कोछे२अ = २छेअ \cdot कोछेअ = \frac{छेअ}{२ज्याअ} = \frac{कोछेअ}{२कोज्याअ}$$

$$= \frac{१}{२ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{१+स्प^२अ}{२स्पअ} = \frac{छे^२अ}{२स्पअ} = \frac{स्पअ+कोस्पअ}{२}$$

$$= \frac{१+कोस्प^२अ}{२कोस्पअ} = \frac{कोछे^२अ}{२कोस्पअ} ।$$

$$(७) व२अ = २ज्या^२अ = २-२कोज्या^२अ = \frac{२स्प^२अ}{१+स्प^२अ}$$

$$= \frac{२स्प^२अ}{छे^२अ} = \frac{२स्पअ}{स्पअ+कोस्पअ} = \frac{२}{१+कोस्प^२अ} = \frac{२}{कोछे^२अ}$$

$$= \frac{२ज्याअ}{कोछेअ} = २ \frac{छे^२अ-१}{छे^२अ} = २ \frac{छेअ-कोज्याअ}{छेअ} ।$$

२१ । अस्मिन् प्रक्रमे निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं प्रदर्श्यते ।

(१) ४५अशानां ज्याकोटिज्यानयनम् । ∴ (२३) प्रक्रमस्यात्

(२) अस्मात् २ज्या^२अ = १-कोज्या^२अ

तथा २कोज्या^२अ = १+कोज्या^२अ एवं सिद्धम् ।

∴ यदि  $\alpha = ४५^{\circ}$  तदा

$$२ \text{ ज्या } ४५^{\circ} = १ - \text{कोज्या } ९०^{\circ} = १ = २ \text{ कोज्या } ४५^{\circ}$$

$$\therefore \text{ज्या } ४५^{\circ} = \pm \sqrt{\frac{१}{२}} = \text{कोज्या } ४५^{\circ} ।$$

अत्रणोमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

( २ )  $३०$  अंशानाम्  $६०$  अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि  $\alpha = ३०^{\circ}$  कल्प्येत तदा  $\text{ज्या } २\alpha = \text{कोज्या } \alpha$ ,

$$\therefore \text{ज्या } २\alpha = २ \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha$$

$$\therefore २ \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha = \text{कोज्या } \alpha$$

$$\therefore \text{ज्या } \alpha = \frac{१}{२} = \text{ज्या } ३०^{\circ} = \text{कोज्या } ६०^{\circ} ।$$

$$\text{कोज्या } ३०^{\circ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२ ३०^{\circ}} = \sqrt{१ - \frac{१}{४}} = \frac{\sqrt{३}}{२} = \text{ज्या } ६०^{\circ} ।$$

( ३ )  $१८^{\circ}$  अंशानाम्  $७२^{\circ}$  अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि  $\alpha = १८^{\circ}$  तदा  $\text{ज्या } २\alpha = \text{कोज्या } ३\alpha$  ।

$$\therefore \text{ज्या } २\alpha = २ \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha,$$

$$( २३ \text{ प्र. } ) \text{कोज्या } ३\alpha = \text{कोज्या } \alpha - ४ \text{ ज्या}^३ \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha ।$$

$$\therefore २ \text{ ज्या } \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha = \text{कोज्या } \alpha - ४ \text{ ज्या}^३ \alpha \cdot \text{कोज्या } \alpha ।$$

$$\therefore २ \text{ ज्या } \alpha = १ - ४ \text{ ज्या}^३ \alpha \therefore ४ \text{ ज्या}^३ \alpha + २ \text{ ज्या } \alpha = १$$

$$\therefore \text{वर्गसमीकरणविधिना ज्या } \alpha = \frac{\pm \sqrt{५} - १}{४}$$

अत्रापि ऋणमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

$$\therefore \text{ज्या } १८^{\circ} = \frac{\sqrt{५} - १}{४} = \text{कोज्या } ७२^{\circ}$$



$$\begin{aligned}
 \text{अत एव कोज्या } १८^{\circ} &= \sqrt{१ - ज्या^२ १८^{\circ}} = \sqrt{१ - \left(\frac{\sqrt{५-१}}{४}\right)^२} \\
 &= \sqrt{\frac{६-२\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{१०+२\sqrt{५}}{१६}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}} = ज्या ७२^{\circ} ।
 \end{aligned}$$

( ४ ) ३६ अंशानाम् ५४ अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = १८^{\circ} तदा ज्या २ अ = २ ज्याअ . कोज्याअ,

$$\begin{aligned}
 \therefore ज्या ३६^{\circ} &= २ \left(\frac{\sqrt{५-१}}{४}\right) \left(\frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४} = कोज्या ५४^{\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अत एव कोज्या } ३६^{\circ} &= \sqrt{१ - ज्या^२ ३६^{\circ}} = \sqrt{१ - \frac{१०-२\sqrt{५}}{१६}} \\
 &= \sqrt{\frac{६+२\sqrt{५}}{१६}} = \frac{\sqrt{५+१}}{४} = ज्या ५४^{\circ} ।
 \end{aligned}$$

( ५ ) ३० एषाम् १८ एषां चार्धसंज्याकोटिज्यानयनम् ।

तत्र ( २८ ) प्रक्रमोक्तमिदं समीकरणद्वयमुपयुज्यते ।

$$ज्याअ = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{१ + ज्या २ अ} - \sqrt{१ - ज्या २ अ} \right\}$$

$$कोज्याअ = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{१ + ज्या २ अ} + \sqrt{१ - ज्या २ अ} \right\}$$

अत्र यदि २अ = ३०^{\circ}, तदा ज्या २अ = \frac{१}{२}

$$\begin{aligned} \text{ज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{२} \left[ \sqrt{१+\frac{३}{२}} - \sqrt{१-\frac{३}{२}} \right] = \frac{१}{२} \left[ \sqrt{\frac{५}{२}} - \sqrt{\frac{१}{२}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ७५^{\circ} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{२} \left[ \sqrt{१+\frac{३}{२}} + \sqrt{१-\frac{३}{२}} \right] = \frac{१}{२} \left[ \sqrt{\frac{५}{२}} + \sqrt{\frac{१}{२}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}} = \text{ज्या } ७५^{\circ} । \end{aligned}$$

$$\text{एवमेव ज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}} - \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४} = \text{कोज्या } ८१^{\circ} ।$$

$$\text{कोज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४} = \text{ज्या } ८१^{\circ} ।$$

( ६ ) ३° अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् ।

अष्टादशानां १८ पञ्चदशानां १५ चांशानां ज्याकोटिज्ययोरव-  
गतयोस्त्रयाणामंशानां ज्याकोटिज्ये

$$\begin{aligned} \text{ज्या } ३^{\circ} &= \text{ज्या } (१८^{\circ} - १५^{\circ}) \\ &= \text{ज्या } १८^{\circ} \times \text{कोज्या } १५^{\circ} - \text{कोज्या } १८^{\circ} \times \text{ज्या } १५^{\circ} \\ \text{कोज्या } ३^{\circ} &= \text{कोज्या } (१८^{\circ} - १५^{\circ}) \\ &= \text{कोज्या } १८^{\circ} \times \text{कोज्या } १५^{\circ} + \text{ज्या } १८^{\circ} \times \text{ज्या } १५^{\circ} \end{aligned}$$

अस्मात् सुखेन ज्ञायते ।

( ७ ) एवं त्रिपण्णवादिनवत्यन्तानामंशानां प्रत्येकं ज्याकोटिज्ये प्रसाध्य  
बालावबोधार्थं विलिख्यते ।

$$\begin{aligned} \text{ज्या } ३^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५}-१) - \frac{\sqrt{३}-१}{८} \sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ८७^{\circ} \end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ६^{\circ} = -\frac{१}{४}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} = \text{कोज्या } ८४$$

$$\text{ज्या } ९^{\circ} = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}} = \text{कोज्या } ८१^{\circ}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १२^{\circ} &= -\frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ७८^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १५^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}-१) \\ &= \text{कोज्या } ७५^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } १८^{\circ} &= \frac{१}{४}(\sqrt{५}-१) \\ &= \text{कोज्या } ७२^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २१^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६९^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २४^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६६^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } २७^{\circ} &= -\frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६३^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ३०^{\circ} &= \frac{१}{२} \\ &= \text{कोज्या } ६०^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ३३^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ५७^{\circ}\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ३६^{\circ} = \frac{१}{२\sqrt{२}} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५४^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ३९^{\circ} = \frac{\sqrt{३+१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५+१}) - \frac{\sqrt{३-१}}{८} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५१^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४२^{\circ} = -\frac{१}{४} (\sqrt{५} - १) = \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ४८^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४५^{\circ} = \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ४५^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ४८^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{८} (\sqrt{५} - १) + \frac{१}{४\sqrt{२}} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ४२^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५१^{\circ} = \frac{\sqrt{३-१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५+१}) + \frac{\sqrt{३+१}}{८} \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ३९^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५४^{\circ} = \frac{१}{४} (\sqrt{५} + १) = \text{कोज्या } ३६^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ५७^{\circ} = -\frac{\sqrt{३-१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५} - १) + \frac{\sqrt{३+१}}{८} \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ३३^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ६०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२} = \text{कोज्या } ३०^{\circ} ।$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६३^{\circ} &= \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{३}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २७^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६६^{\circ} &= \frac{३}{४}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २४^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ६९^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } २१^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७२^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } १८^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७५^{\circ} &= \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}+१) \\ &= \text{कोज्या } १५^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ७८^{\circ} &= \frac{३}{४}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } १२^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ८१^{\circ} &= \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{३}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ९^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ज्या } ८४^{\circ} &= \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \\ &= \text{कोज्या } ६^{\circ}।\end{aligned}$$

$$\text{ज्या } ८७^{\circ} = \frac{\sqrt{३-१}}{८\sqrt{२}} (\sqrt{५-१}) + \frac{\sqrt{३+१}}{८} \sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{ज्या } ३^{\circ} ।$$

$$\text{ज्या } ९०^{\circ} = १$$

$$= \text{ज्या } ०^{\circ} ।$$

३२ । अथ कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः \* ।

### तृतीयोऽध्यायः ३ ।

अत्र त्रिभुजचतुर्भुजयोर्वृत्तलानसमानजुवतुभुजक्षेत्रस्य वृत्तस्य च कतिचन गुणाः प्रदर्श्यन्ते ।

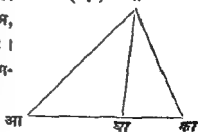
३४ । त्रिभुजे त्रयो भुजास्नावन्त एव कोणाश्चेति पदव-  
यवा भवन्तीत्युक्तं प्राक् ।

तत्र त्रयः कोणाः क्रमेण आ, का, गा, एभिर्घोत्याः स्युः ।  
तत्संमुखकोणाश्च क्रमेण अ, क, ग, एभिः ।

३५ । प्रतित्रिभुजं तत्तद्भुजाद् तत्तत्संमुखकोणज्या समा-  
नगुणा भवति ।

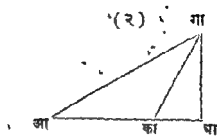
कल्प्यते आकागा-त्रिभुजस्य  
आ, का, गा, कोणाः । तथा अ,  
क, ग, क्रमेण तत्संमुखभुजाः ।  
गा-कोणात् आका-भुजे गा-कोण-  
विन्दोः गाघा-लम्बः कार्यः ।

( १ ) गा



$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}} ।$$

ॐ अस्य प्रक्रमस्य तथा ३३ प्रक्रमस्य च केवलं गणिते उपयोगाद्-  
ग्रन्थान्ते तद्वैशद्यं द्रष्टव्यम् ।



$$\text{ज्याका ज्यागाकाघा,} = (\text{द्वि. क्षे.}) = \frac{\text{गापा}}{\text{कागा}} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{अ}{क} \quad \therefore \text{ज्याआ} : \text{ज्याका} = अ : क$$

$$\text{यद्वा} \quad अ : ज्याआ = क : ज्याका \quad (2)$$

$$\text{साजाल्यात्} \quad अ : ज्याआ = ग : ज्यागा$$

$$क : ज्याका = ग : ज्यागा \quad (3)$$

३६। त्रिभुजे भुजयोगान्तरादितस्तत्संमुखकोणयोगान्तरार्धस्पर्शरेखादिसम्यन्यः प्रदर्श्यते ।

$$\therefore अ : क = ज्याआ : ज्याका$$

$$\begin{aligned} अ + क : अ - क &= ज्याआ + ज्याका : ज्याआ - ज्याका \\ &= २ ज्या \frac{१}{२} (अ + का) कोज्या \frac{१}{२} (अ - का) : २ कोज्या \frac{१}{२} (अ + का) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times ज्या \frac{१}{२} (अ - का) &= \frac{ज्या \frac{१}{२} (अ + का)}{कोज्या \frac{१}{२} (अ + का)} : \frac{ज्या \frac{१}{२} (अ - का)}{कोज्या \frac{१}{२} (अ - का)} \\ &= स्पर्श \frac{१}{२} (अ + का) : स्पर्श \frac{१}{२} (अ - का) \end{aligned}$$

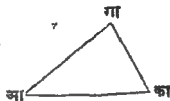
यदि भुजयोर्योगेन तयोरन्तरं लभ्यते तदा तत्संमुखकोणयोरे-  
क्यार्धस्य स्पर्शरेखा तयोरन्तरार्धस्य स्पर्शरेखा लभ्यत इत्यर्थः ।

३७ । त्रिभुजे भुजतत्संमुखकोणसम्बन्धतो ज्यास्पर्शरेखा-  
दिसम्बन्धः प्रदर्श्यते ।

यदि गा समकोण स्यात्

$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$



$$\text{स्पआ} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} । \quad \text{ज्याका} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्याका} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} । \quad \text{स्पका} = \frac{\text{आगा}}{\text{कागा}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} ।$$

३८ । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणकोटिज्यानयनयुक्तिः प्रदर्श्यते  
( ३५ प्रक्रमस्मर्त्तुं द्विगुण्यम् )

यदा का कोणो लघुस्तदा	$\left\{ \begin{array}{l} \text{एते उन्मिती क्रमेण} \\ \text{क्षेत्रमितो द्वितीयाध्यायस्य} \\ \text{त्रयोदशद्वादशप्रतिशाभ्यां} \\ \text{संपद्येते ।} \end{array} \right.$
$\text{आगा}^2 = \text{आका}^2 + \text{कागा}^2 - २\text{आका} \cdot \text{काघा}$ यदा च का कोणोऽधिकस्तदा $\text{आगा}^2 = \text{आका}^2 + \text{कागा}^2 + २\text{आका} \cdot \text{काघा}$	

तत्र यदा का कोणो लघुस्तदा,

$$\frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्याका} ।$$

काघा = कागा कोज्याका ।

यदा वा का कोणोऽधिकस्तदा



$$\therefore \frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्यागाकाघा} = - \text{कोज्याका}$$

$$\therefore \text{काघा} = - \text{कागा} \cdot \text{कोज्याका}$$

अत उत्थापनेन सिद्धमुभयत्रापि तुल्यमेव ।

$$\therefore क^2 = ग^2 + अ^2 - २अग \cdot \text{कोज्याका} ।$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२अग} ।$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याभा} = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग} ।$$

$$\text{एवमेव कोज्यागा} = \frac{अ^2 + क^2 - ग^2}{२अक} \text{ ७ ।}$$

३९ । त्रिभुजे भुजेभ्योऽधीष्टकोणज्यानयनपुक्तिप्रकारः ।

$$\text{अत्र ज्याभा} = १ - \text{कोज्याभा}$$

$$= (१ + \text{कोज्याभा})(१ - \text{कोज्याभा})$$

$$\text{परन्तु } १ + \text{कोज्याभा} = १ + \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग}$$

$$= \frac{२कग + क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग} = \frac{(क^2 + २कग + ग^2) - अ^2}{२कग}$$

$$= \frac{(क + ग)^2 - अ^2}{२कग} = \frac{(क + ग + अ)(क + ग - अ)}{२कग} ।$$

७ अनेन—

“भुजवर्गयुतिर्भूमिभर्गोना भुजपातहत् ।

दक्षिता त्रिभुजस्याग्रकोटिज्या भुजसंयुतौ ॥”

इति विशेषोक्तमप्युपपद्यते ।

$$\text{तथा } १\text{-कोज्याआ} = १ - \frac{\text{क}^२ + \text{ग}^२ - \text{अ}^२}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{२\text{कग} - \text{क}^२ - \text{ग}^२ + \text{अ}^२}{२\text{कग}} = \frac{\text{अ}^२ - (\text{क}^२ - २\text{कग} + \text{ग}^२)}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{\text{अ}^२ - (\text{क} - \text{ग})^२}{२\text{कग}} = \frac{(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})(\text{अ} - \text{क} + \text{ग})}{२\text{कग}}$$

अथ यदि कल्प्येत २स = अ + क + ग

तदा २(स - अ) = अ + क + ग - २अ = क + ग - अ ।

२(स - क) = अ + क + ग - २क = अ + ग - क ।

२(स - ग) = अ + क + ग - २ग = अ + क - ग ।

$$\therefore १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२स \times २(स - अ)}{२\text{कग}} = \frac{२स(स - अ)}{२\text{कग}}$$

$$\text{तथा } १\text{-कोज्याआ} = \frac{२(स - क) \times २(स - ग)}{२\text{कग}}$$

$$= \frac{२(स - क)(स - ग)}{२\text{कग}} ।$$

$$\text{अत एव ज्या}^२\text{आ} = \frac{४}{\text{क}^२.\text{ग}^२} \text{स}(स - अ)(स - क)(स - ग) ।$$

$$\therefore \text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{क.ग}} \sqrt{\text{स}(स - अ)(स - क)(स - ग)}$$

अत्र मानस्य ऋणत्वं न संभवति त्रिभुजैककोणस्य समकोण-  
द्वयात्पत्वात् तज्ज्याया घनत्वात् ।

$$\text{साजात्यात् ज्याका} = \frac{२}{अग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

$$\text{ज्यागा} = \frac{२}{अक} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

४० । त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणार्धज्याकोटिज्यास्पर्शरेखाणां मानं प्रदर्श्यते ।

$$\therefore \text{२ज्या}^२\text{आ} = १ - \text{कोज्याआ} = \frac{२(\text{स}-क)(\text{स}-ग)}{कग} ।$$

$$\therefore \text{ज्या}^२\text{आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-क)(\text{स}-ग)}{कग}} ।$$

$$\therefore \text{२कोज्या}^२\text{आ} = १ + \text{कोज्याआ} = \frac{२\text{स}(\text{स}-अ)}{कग} ।$$

$$\therefore \text{कोज्या}^२\text{आ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-अ)}{कग}} ।$$

$$\text{अत एव स्प}^२\text{आ} = \frac{\text{ज्या}^२\text{आ}}{\text{कोज्या}^२\text{आ}} = \sqrt{\frac{(\text{स}-क)(\text{स}-ग)}{\text{स}(\text{स}-अ)}} ।$$

अत्राप्युन्मितीनां धनत्वमेव बोध्यम् ।

$$\text{साजात्यात् ज्या}^२\text{का} = \sqrt{\frac{(\text{स}-अ)(\text{स}-ग)}{अग}} ।$$

$$\text{ज्या}^२\text{गा} = \sqrt{\frac{(\text{स}-अ)(\text{स}-क)}{अक}} ।$$

$$\text{कोज्याऽंका} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स} - \text{क})}{\text{अग}}} \quad \text{कोज्याऽंग} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स} - \text{ग})}{\text{अक}}}$$

$$\text{स्पऽंका} = \sqrt{\frac{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{ग})}{\text{स}(\text{स} - \text{क})}}$$

$$\text{स्पऽंग} = \sqrt{\frac{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})}{\text{स}(\text{स} - \text{ग})}}$$

४१ । त्रिभुजे भुजेभ्यः क्षेत्रफलानयनयुक्तिप्रकारः प्रदर्श्यते ।

यतो रेखागणितस्य द्वितीयाध्यायतो लम्बगुणं भूम्यर्धं खलु त्रिभुज-  
क्षेत्रफलं भवति ।

$$\therefore \text{आकाशा-त्रिभुजफलम्} = \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{गाघा}$$

$$= \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}} = \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ}$$

$$= \frac{\text{कग}}{2} \cdot \frac{2}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}$$

$$= \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}$$

अत एवार्थभटः—

“सर्वभुजैवयं दलितं चतुःस्थितं बाहुभिः क्रयाद्रहितम् ।

तद्भातपदं त्रिभुजे क्षेत्रे स्पष्टं फलं भवति ॥”

४२ । (अनु० १)  $\therefore$  त्रिभुजफलम्

$= \frac{1}{2} \text{आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ}$ , इति पूर्वप्रक्रमे सिद्धम् ।

∴ त्रिभुजे भुजयोर्धार्तार्ध भुजान्तर्गतकोणज्यया गुणितं क्षेत्रफलं भवतीत्यवगम्यते ।

४३ । (अनु० २) त्रिभुजे पूर्वोक्तप्रक्रमैर्लम्बावाभावगमः सुगमः ।

$$\therefore \text{कोज्याआ} = \left( \frac{\text{आघा}}{क} \right) = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२कग}$$

$$\therefore \text{आघा} = \frac{क^2 + ग^2 - अ^2}{२ग} ।$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \pm \left( \frac{\text{काघा}}{अ} \right) = \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२अग}$$

$$\therefore \text{काघा} = \pm \frac{अ^2 + ग^2 - क^2}{२ग} ।$$

अत्र लम्बो यथा त्रिभुजस्थान्तर्धर्हिर्वा निपठेत् तदनुसारेण द्वितीयावाघाया धनर्णत्वं बोध्यम् ।

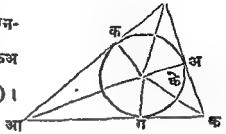
$$\therefore \text{ज्याआ} = \left( \frac{\text{गाघा}}{क} \right) = \frac{२}{कग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

$$\therefore \text{गाघा} = \frac{२}{ग} \sqrt{\text{स}(\text{स}-अ)(\text{स}-क)(\text{स}-ग)} ।$$

४४ । त्रिभुजस्य भुजेभ्यस्तदन्तर्धर्हिर्लङ्घनयोर्द्वितीयोऽप्यासा-  
र्धानयनं मददर्यते ।

( १ ) तत्रादौ त्रिभुजान्तर्लम्बवृत्तव्यासार्धानयनम् । गा

यदि आकागा-त्रिभुजान्तर्लम्ब-  
वृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत तदा केअ  
' = केक = केग = व्यासार्ध = ( व ) ।



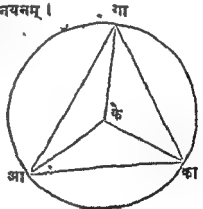
अथ  $\therefore$  फ =  $\triangle$  आकेक +  $\triangle$  ककेग +  $\triangle$  आकेग

$$= \frac{1}{2} ग.व + \frac{1}{2} अ.व + \frac{1}{2} क.व = \frac{अ + क + ग}{2} व = स.व ।$$

$$\therefore व = \frac{फ}{स} = \frac{\sqrt{स(स-अ)(स-क)(स-ग)}}{स} ।$$

( २ ) त्रिभुजबहिर्लम्बवृत्तव्यासार्धानयनम् । गा

यदि आकागा-त्रिभुज-  
बहिर्लम्बवृत्तस्य केन्द्रं (के) कल्प्येत  
तदा केआ = केक = केग = व्या-  
सार्ध = ( वा ) । अथ समानभूमौ  
वर्तमानयोः केन्द्रपरिधिर्लम्बयोः  
कोणयोरारधोऽन्यतो द्विगुणो भ-  
वत्यतः ( ४२ प्रक्रमतः )



$$फ = \frac{1}{2} अ.क . ज्या \frac{1}{2} आकेक ल ।$$

७ अनेन—

“भुजमध्यगता जीवा क्षुण्णा दोष्णोर्ध्वेन सा ।  
दक्षिणा त्रिभुजस्य ग्यात् फलं वाऽन्यप्रकारतः ॥”  
इति विनोदोत्तमपुत्रपद्येव ।

$$\text{परन्तु ज्या } \frac{1}{2} \text{ आकेका} = \frac{\frac{1}{2} \text{ आका}}{\text{आके}} = \frac{\text{ग}}{२वा} ।$$

$$\therefore \text{फ} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} \therefore \text{वा} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४फ}$$

$$= \frac{\text{अ.क.ग}}{४ \sqrt{\text{स}(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते-त्रिभुजे कोणस्य ज्या तत्कोणसंमुखभुजात् त्रिभुजबहिर्लेग्नवृत्तव्यासाप्तेन तुल्या भवतीति ।

४५ । (अनुमा० १) यदि आकाशा त्रिभुजे मा-कोणात् आका-भूमौ लम्बः (ल) क्रियते तदा  $\text{फ} = \frac{1}{2} \text{ ग.ल} ।$

$$\text{अथ पूर्वप्रक्रमतः सिद्धम् } \text{फ} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} ।$$

$$\therefore \frac{1}{2} \text{ ग.ल} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} \therefore \text{वा} = \frac{\text{अ.क.ग}}{२ल} ।$$

अत एव सिद्धान्तविषयकक्रोडप्रन्ये मयोक्तम् ।

“त्रियाहुकयहिलेप्रवृत्तव्यासदलं किल ।

भुजयोराहतेः खण्डालुम्बाप्तेन समं भवेत्”-इति ।

४६ । (अनु० २) ।

$$\therefore \text{फ} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}}{२} \text{ वा} = \frac{\text{अ.क.ग}}{४वा} \therefore २वाव = \frac{\text{अ.क.ग}}{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते-त्रिभुजे त्रयाणां भुजानां यथात् तस्योणेनात्र त्रिभुजान्तर्बहिर्लेग्नवृत्तव्यासाधयोर्ध्वेन द्विगुणेन तुल्यं भवतीति ।

४७ । अथ वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजस्य भुजेभ्यस्तत्कोणकर्ण-  
फलादीनामानयनम् ।

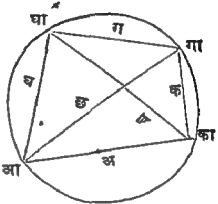
कल्प्यते आका = अ, कागा = क, गाघा = ग, घाआ = घ,  
काघा = च, आगा = छ ।

( १ ) अतः ( ३८ प्रक्रमतः )

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{२\text{अघ}}$$

$$\text{कोज्यागा} = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{२\text{कग}} ।$$

$$\therefore \text{च}^2 = \text{अ}^2 + \text{घ}^2 - २\text{अघ.कोज्याआ} \quad \text{आ} \\ = \text{क}^2 + \text{ग}^2 - २\text{कग.कोज्यागा}$$



परन्तु क्षेत्रमितेस्तृतीयऽध्यायस्यैकविंशप्रतिक्षया

$$\text{कोज्याआ} = \text{कोज्या} ( १८०^\circ - \text{गा} ) = - \text{कोज्यागा}$$

$$\therefore \text{आ}^2 + \text{घ}^2 - २\text{अघ} . \text{कोज्याआ} = \text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग} . \text{कोज्याआ},$$

$$\therefore \text{कोज्याआ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{क}^2 - \text{ग}^2}{२(\text{अघ} + \text{कग})} = - \text{कोज्यागा}$$

$$\text{साजात्यात् कोज्याका} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2 - \text{घ}^2}{२(\text{अक} + \text{गघ})} = - \text{कोज्याघा} ।$$

( २ ) अतः ३९ प्रक्रमोक्तयुक्त्या—

$$\text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{अघ} + \text{कग}} \sqrt{ ( \text{स} - \text{अ} ) ( \text{स} - \text{क} ) ( \text{स} - \text{ग} ) ( \text{स} - \text{घ} ) }$$

$$( \text{अत्र स} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ इति बोध्यम् } )$$



( ३ ) ४० प्रक्रमोक्तयुक्ता

$$\text{ज्याऽङ्गा} = \sqrt{\frac{(\text{स-अ})(\text{स-घ})}{\text{अघ+कग}}} = \text{कोज्याऽङ्गा}$$

$$\text{कोज्याऽङ्गा} = \sqrt{\frac{(\text{स-क})(\text{स-ग})}{\text{अघ+कग}}} = \text{ज्याऽङ्गा}$$

$$\text{स्पष्टाङ्गा} = \sqrt{\frac{(\text{स-अ})(\text{स-घ})}{(\text{स-क})(\text{स-ग})}} = \text{कोस्पष्टाङ्गा}$$

$$( ४ ) \therefore \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{२\text{अघ}} = - \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{२\text{कग}}$$

$$\therefore \text{च}^2 = \frac{(\text{अग+कघ})(\text{अक+गघ})}{\text{अघ+कग}}$$

$$\text{साजात्यात् छ}^2 = \frac{(\text{अग+कघ})(\text{अघ+कग})}{\text{अक+गघ}}$$

एतेन,

“कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यमाजितं गुणयेत् ।

योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णां पदे विपमे ॥”

इति ब्रह्मसूत्रोक्तं वृत्तान्तर्गतविषमचतुर्भुजपरमित्यवगम्यते ।

$$( ५ ) \text{ अत एव च छ}^2 = \text{अग} + \text{कघ}, \text{ तथा } \frac{\text{च}}{\text{छ}} = \frac{\text{अक} + \text{गघ}}{\text{अघ} + \text{कग}}$$

अतो मत्कृतकोट्यन्ये—

“वृत्तान्तःस्थचतुर्धाहुक्षेत्रे श्रवणयोर्हतिः ।

भुजप्रतिभुजाहत्योः समासेन समा भवेत् ॥”

$$\begin{aligned} (६) (आकाशा) चतुर्भुजफलम् &= \triangle आकाशा + \triangle काशा \\ &= \frac{१}{२} अघ . ज्याआ + \frac{१}{२} कग . ज्याआ = \frac{१}{२} (अघ + कग) ज्याआ \\ &= \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)} \end{aligned}$$

अतः श्रीपति —

“भुजसमासदलं हि चतुःस्थितं निजभुजैः क्रमशः पृथगूनितम् ।  
अथ परस्परमेव समाहतं कृतिपदं त्रिचतुर्भुजयोः फलम् ॥”

(७) यदि (आकाशा) त्रिभुजलघुवृत्तस्य व्यासार्धं (वा) कल्प्येत

$$\text{सदा (४४ प्रक्रमत) वा} = \frac{\text{अघच}}{४ \triangle आकाशा}$$

$$\text{परन्तु } \triangle आकाशा = \frac{१}{२} \text{ अघ ज्याआ}$$

$$\therefore \text{वा} = \frac{\text{अघच}}{२\text{अघ ज्याआ}} = \frac{\text{च}}{२\text{ज्याआ}} = \frac{\text{च}}{२\text{ज्याआ}} ।$$

$$\therefore \text{वा} = \frac{\text{छ}}{२\text{ज्याआ}} = \frac{\text{छ}}{२\text{ज्याआ}} ।$$

$$\text{ज्याआ} = \frac{२}{\text{अघ + कग}} \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{वा} &= \frac{\text{च}}{२\text{ज्याआ}} = \frac{\text{च (अघ + कग)}}{४ \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}} \\ &= \frac{१}{२} \sqrt{\frac{(\text{अक + गघ})(\text{अग + कघ})(\text{अघ + कग})}{(\text{स-अ})(स-क)(स-ग)(स-घ)}} \end{aligned}$$

अस्मादिदमवगम्यते विषमचतुर्भुजमात्रं वृत्तान्तं कर्तुं शक्यते ।  
अथ च भुजानां क्रमव्यत्यासेऽपि न क्षेत्रफले विकारं विन्दु कोणा-

दिष्वेव । अत्र यदि  $\phi = 0$  कल्प्येत तदा कोणादीनां मानानि पूर्वसा-  
धितैस्त्रिभुजकोणादीनां मानैरभिन्नानि संपद्यन्ते ।

४८ । विषमचतुर्भुजमात्रस्यान्योन्यसंमुखकोणद्वयविशि-  
ष्टेभ्यो भुजेभ्यः फलानयनम् ।

अत्र पूर्वप्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम् ।

तत्र यदि क्षेत्रफलद्योतकं ( फ ) कल्प्येत तदा

$$फ = \frac{1}{2} ( अघ . ज्याआ + कग . ज्यागा )$$

$$परन्तु कोज्याआ = \frac{अ^2 + घ^2 - च^2}{२अघ}, कोज्यागा = \frac{क^2 + ग^2 - च^2}{२कग}$$

$$\therefore १ + कोज्याआ = \frac{(अ + घ)^2 - च^2}{२अघ} \quad (१)$$

$$१ - कोज्याआ = \frac{च^2 - (अ - घ)^2}{२अघ} \quad (२)$$

$$१ + कोज्यागा = \frac{(क + ग)^2 - च^2}{२कग} \quad (३)$$

$$१ - कोज्यागा = \frac{च^2 - (क - ग)^2}{२कग} \quad (४)$$

ततः ( १ ) ( ४ ) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

$$(अ + घ)^2 - (क - ग)^2 = २अघ (१ + कोज्याआ) + २कग (१ - कोज्यागा)$$

$$वा (अ - क)(अ - ग) = अघ . \frac{१ + कोज्याआ}{२} + कग . \frac{१ - कोज्यागा}{२}$$

$$= \text{अघ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} + \text{कोज्या}^2 \text{गा} \quad (५)$$

एवमेव (२) (३) आभ्यां सिद्धौ पक्षौ

$$(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{घ}) = \text{अघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} + \text{कग} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा} \quad (६)$$

एवम् (५) (६) अनयोर्गुणनात्

$$(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ})$$

$$\begin{aligned} &= \text{अ}^2 \text{घ}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा} \\ &+ \text{क}^2 \text{ग}^2 \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा} + \text{अकगघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा} \dagger \\ &= (\text{अघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} + \text{कग} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा})^2 \\ &+ \text{अकगघ} (\text{कोज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{गा} - \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा})^2, \\ &= २(\text{अघ} \cdot \dagger \text{ज्या}^2 \text{आ} + \text{कग} \cdot \text{ज्या}^2 \text{गा})^2 + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 (\text{आ} + \text{गा}) \\ &= \text{फ}^2 + \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 (\text{आ} + \text{गा}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{फ} = \sqrt{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ}) - \text{अकगघ} \cdot \text{कोज्या}^2 (\text{आ} + \text{गा})}$$

अथ  $\therefore \text{आ} + \text{फा} + \text{गा} + \text{घा} = ३६०^\circ \therefore \dfrac{३}{२} (\text{आ} + \text{गा}) = १८०^\circ - \dfrac{३}{२} (\text{फा} + \text{घा})$

$$\text{अत्र } \frac{१ + \text{कोज्या}^2 \text{आ}}{२} = \text{कोज्या}^2 \text{आ}, \text{ एतदर्थं (२४) प्रक्रमो द्रष्टव्यः ।}$$

† अत्र २अकगघ  $\cdot$  ज्या<sup>२</sup>आ  $\cdot$  कोज्या<sup>२</sup>आ  $\cdot$  ज्या<sup>२</sup>गा  $\cdot$  कोज्या<sup>२</sup>गा  
एतत्तुल्यं धनमृणं च क्रियते तथाऽप्यविकार एव ।

‡ २ज्या<sup>२</sup>आ  $\cdot$  कोज्या<sup>२</sup>आ = २ज्या<sup>२</sup>२आ । अत्र २आ - स्थाने (आ)  
अनेनोत्थाप्यते तदा २ज्या<sup>२</sup>आ  $\cdot$  कोज्या<sup>२</sup>आ = ज्या<sup>२</sup>आ ।

$$\therefore \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} = \frac{\text{ज्या}^2 \text{आ}}{२}$$

$$\therefore \text{अघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ} \cdot \text{कोज्या}^2 \text{आ} = \frac{\text{अघ} \cdot \text{ज्या}^2 \text{आ}}{२} \text{ इतोऽमे स्पष्टम् ।}$$

∴ कोज्या<sup>२</sup> (आ + गा) = कोज्या<sup>२</sup> (का + घा) । अत इदं फलं समुखकोणद्वययोरन्यतरेण विशिष्टेभ्यश्चतुर्भ्यो भुजेभ्यः सम्पन्नम् ।

$$\text{तत्र यदि आ + गा = का + घा = } 100^\circ$$

$$\text{तदा कोज्या}^2 \frac{1}{2} (\text{आ + गा}) = \text{कोज्या}^2 \frac{1}{2} (\text{का + घा}) = 0$$

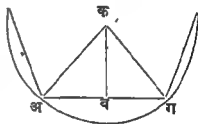
$$\text{अतोऽत्र फ} = \sqrt{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ})}$$

पूर्वसाधितेन वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजमानेनाभिन्नं जातम् ।

अत एव विषमचतुर्भुजस्यानेकविधेषु फलेषु वृत्तान्तर्गतस्य तस्य फलं महत्तमं भवति । इदमेव पूर्वाचार्यैः सप्रन्येषु साधितम् ।

४९ । वृत्तान्तर्गतस्य समानर्जुबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफल-  
योरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल (क) वृत्तकेन्द्रं स्यात्  
तदन्तर्गतस्य समानर्जु - (न) सं-  
ख्याकभुजक्षेत्रस्य भुजः = अग,  
(ब) = वृत्तस्य व्यासार्धं  
स्यात् तदा कअ, कग रेखे  
संयोज्य अग-रेखोपरि कब लम्बः  
कार्यः ।



$$\text{अत्र } \angle \text{अकग} = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{बहुभुजक्षेत्रपरिधिश्च} = n \cdot \text{अग} = 2n \cdot \text{अब}$$

$$= 2n \cdot \text{अक} \cdot \text{ज्या } \angle \text{अकब} = 2n \cdot \text{ब} \cdot \text{ज्या } \frac{180^\circ}{n}$$

$$\text{एवं बहुभुजक्षेत्रफलम्} = n \cdot \text{अकगक्षेत्रम्} = n \cdot \frac{\text{अग} \cdot \text{कय}}{2}$$

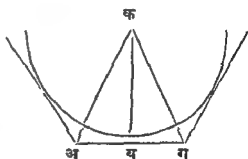
$$= n \cdot \text{अक} \cdot \text{ज्याअकय} \times \text{अक} \cdot \text{कोज्या} \angle \text{अकय}$$

$$= n \cdot \text{अक}^2 \cdot \text{ज्या} \frac{180^\circ}{n} \cdot \text{कोज्या} \frac{180^\circ}{n} \quad ,$$

अस्मादिदमवगम्यते तेषां समानजुवहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्क्षेत्रबहिर्लङ्गनवृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति । तत्क्षेत्रफलं च तत्क्षेत्रबहिर्लङ्गनवृत्तव्यासार्ध-वर्गात् समानगुणं भवतीति ।

५० । वृत्तबहिर्लङ्गस्य ऋजुसमवहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफल-योरानयनयुक्तिप्रकारः ।

अत्र किल वृत्त बहि-  
र्लङ्गन( न ) संख्याऋजुमु-  
जक्षेत्रस्य अग-भुजः व-  
स्थाने परिधौ लङ्गनः ।



$$\text{बहिर्लङ्गनवहुभुजक्षेत्रपरिधिः} = n \cdot \text{अग} = 2n \cdot \text{अय}$$

$$= 2n \cdot \text{कय} \cdot \text{स्पअकय} = 2n \cdot \text{अय} \cdot \text{स्प} \frac{180^\circ}{n}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफलम्} = n \cdot \text{अकगक्षेत्रफलम्}$$

$$= n \times \frac{\text{अग} \cdot \text{कय}}{2} = n \cdot \text{कय} \cdot \text{स्प} \angle \text{अकय} \times \text{कय}$$

$$= n \cdot \text{अक}^2 \cdot \text{स्प} \frac{180^\circ}{n} \quad ।$$

अस्मादिदमवगम्यते येषां समानर्जुवहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या  
समाना भवेत् तेषु तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्क्षेत्रान्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धात्  
समानगुणो भवति तत्क्षेत्रफलं च तत्तदन्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धवर्गात्  
तुल्यगुणं कृ भवतीति ।

५१ । (ब)-व्यासार्धविशिष्टस्य वृत्तस्यान्तर्वहिश्च लघ्नयोः  
समानर्जु-(न)संख्याकभुजक्षेत्रयोः क्रमेण परिधी किल  
(प) (पा) इति स्यातां फले च (फ) (फा) इति स्याताम् ।

$$\text{तदा } \frac{प}{पा} = \frac{\text{नव. ज्या } \frac{१८०^\circ}{न}}{\text{नव. स्प } \frac{१८०^\circ}{न}} = \text{कोज्या } \frac{१८०^\circ}{न}$$

$$\text{तथा } \frac{फ}{फा} = \frac{\text{नव}^२ \cdot \text{ज्या } \frac{१८०^\circ}{न} \cdot \text{कोज्या } \frac{१८०^\circ}{न}}{\text{नव}^२ \cdot \text{स्प } \frac{१८०^\circ}{न}} = \text{कोज्या}^२ \frac{१८०^\circ}{न}$$

अत्र यदि न = ∞ स्यात्

$$\text{तदा } \frac{प}{पा} = \text{कोज्या } \frac{१८०^\circ}{\infty} = \text{कोज्या } ०^\circ = १$$

$$\text{तथा } \frac{फ}{फा} = \text{कोज्या}^२ \frac{१८०^\circ}{\infty} = \text{कोज्या}^२ ०^\circ = १$$

∴ प = पा तथा फ = फा भवेत् ।

अत एव वृत्तान्तर्बहिर्लग्नबहुभुजक्षेत्रयोर्भुजसंख्या यथायथाऽधिका स्यात् तथातथा ते क्षेत्रे प्रत्येकं तद्वृत्तक्षेत्रासन्ने भवेताम् । तथा च भुज-संख्याया आनन्त्ये ते वृत्तक्षेत्रे भूत्वा सर्वाशैर्मियो मिलेताम् । अत एव तत्तद्वृत्तपरिधिस्तत्तद्वृत्तव्यासार्धात् समानगुणो भवति तत्तद्वृत्तफलं च तत्तद्वृत्तव्यासार्धवर्गात् समानगुणं भवतीत्यवगम्यते ।

५२ । अध वृत्तक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयनयुक्तिप्रकारः ।

(१) तत्र किल वृत्तान्तर्गतबहुभुजक्षेत्रपरिधिः = २नव, ज्या  $\frac{१८०^{\circ}}{न}$  ।

अत्र यथायथा न-संख्याऽधिका स्यात् तथातथाऽयं परिधिवृत्त-परिधेरासन्नतरो भवेदित्यत एव पूर्वम् (ज्या  $\frac{१८०^{\circ}}{न}$ ) अस्य तथा मानं

साध्यते यथाऽत्र न-संख्या महती स्यात् ।

तथा हि : ( २४ ) प्रक्रमस्थात् ( फा ) तः

$$\text{कोज्या } \frac{\text{आ}}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}} \sqrt{१ + \text{कोज्याआ}} \quad \text{॥}$$

$$\therefore \text{कोज्या } \frac{९०^{\circ}}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{एवम् कोज्या } \frac{९०^{\circ}}{२^२} = \frac{१}{\sqrt{२}} \sqrt{१ + \frac{१}{\sqrt{२}}}$$

॥ अत्र यदि आ =  $९०^{\circ}, \frac{९०^{\circ}}{२}, \frac{९०^{\circ}}{२^२}$  इत्यादि कल्प्यते तदाऽपः-

स्थितस्वरूपाणि जायन्ते ।



$$\text{कोज्या } \frac{90^\circ}{2^p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \dots}} \\ \text{एवमग्रेऽपि}$$

अतया युक्त्या कोज्या  $\frac{90^\circ}{2^p}$  अस्य तथा मानं गणयितुं शक्यते  
यथाऽत्र ( प ) संख्या-महती स्यात् । तथा च यदि  $n = 2^p$  कल्प्येत

$$\text{तदा ज्या } \frac{180^\circ}{n} = 2 \text{ कोज्या } \frac{90^\circ}{2^p} \cdot \text{ज्या } \frac{90^\circ}{2^p} \\ = 2 \text{ कोज्या } \frac{90^\circ}{2^p} \sqrt{1 - \text{कोज्या}^2 \frac{90^\circ}{2^p}} \text{ आसन्नं स्यात् ।}$$

एवमानीतं ज्या  $\frac{180^\circ}{n}$  अस्य मानं  $n$ -संख्यया गुणितं सत्

३.१४१५९२६५ ... इत्यादि भवति । इदम्  $\pi$  अनेन द्योत्यं  
स्यात् । तथा सति वृत्तपरिधिः  $= 2\pi$  ।

( २ ) अनन्तरोक्तप्रक्रमे सङ्केतितयोः ( प ) ( फ ) वर्णयोः क्रमेण

माने २नव. ज्या  $\frac{180^\circ}{n}$ , नव. ज्या  $\frac{180^\circ}{n}$ , कोज्या  $\frac{180^\circ}{n}$  ।

$$\frac{\text{फ}}{\text{प}} = \frac{\text{नव. ज्या } \frac{180^\circ}{n} \cdot \text{कोज्या } \frac{180^\circ}{n}}{2\text{नव. ज्या } \frac{180^\circ}{n}} = \frac{1}{2} \text{ कोज्या } \frac{180^\circ}{n} \text{ ।}$$



अतः अक्ष-लघुकोणसंमुखचापम् अव-स्वज्यातोऽधिकं स्वस्पर्शरेखा-  
तश्च न्यूनं भवति तदेव विलिख्य प्रदर्श्यते

$$अ > ज्याअ < स्पअ ।$$

तत्र यदि अ = ९० स्यात् तर्हि

$$\frac{ज्याअ}{स्पअ} = \frac{कोज्याअ}{व} = \frac{कोज्या०^{\circ}}{व} = \frac{व}{व} = १$$

अस्मादिदमनुमीयते । चापस्यात्यन्तहासे तज्यास्पर्शरेखे मिथ-  
स्तुत्ये भवतः । अत एव ते प्रत्येकं स्वचापेन समे स्याताम् ।

$$तथा \frac{ज्याअ}{अ} = \frac{स्पअ}{अ} = १, एवं सिध्यति ।$$

५३ । रूपव्यासार्धे चापस्य या जीवादयस्ता एव तच्चा-  
पसम्बन्धिकोणस्यापि भवन्तीति पूर्वं प्रदर्शितम् । (१४ प्र. द्रं.)  
तत्र यच्चापदैर्घ्यमानं तदेव तत्सम्बन्धिकोणस्य स्यात् तच्च  
तस्य कोणस्य चापीयं मानमुच्यते । बीजक्रियया सम्पाद्यमाने  
त्रिकोणमितिगणिते कोणस्य चापीयमानमेव गृह्यते ।

अथ यदि ( व ) व्यासार्धे ( २०व ) अयं पूर्वसिद्धः परिधिस्तदा  
रूपव्यासार्धे क इत्यनुपातेनाप्तं ( २० ) रूपव्यासार्धे परिधिदैर्घ्यम् ।

अतः २० = ६३. १४१५९२६५ इत्यादिकं रूपव्यासार्धेऽर्धपरिधि-  
मानं समकोणद्वयस्य चापीयं मानं स्यात् ।

तथा च यस्य कोणस्य चापीयं मानं रूपं स्यात् तस्य

$$\frac{१८०^{\circ}}{६३.१४१५९२६५} = ५७.२९५७ इ० = ५७^{\circ} । १७' । ४४'' . ६ इत्या-$$

द्यंशादिमानं भवेत् । अस्मान्निर्दिष्टकोणस्यांशादिमानाच्च तत्कोणसंब-  
न्धिचापदैर्घ्यावगमः सुगमः । ।

अथ

## परीक्षार्थिजनोपकारार्थं

( २९ ) प्रक्रमोक्तप्रश्नानामुत्तराणि ।

$$(१) \text{ ज्याञ}^२ = १ - \text{कोज्या}^२\text{ञ} \therefore \text{ज्याञ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{ञ}}$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \cdot \text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \text{कोज्याञ} \cdot \text{स्पञ} ।$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \times \frac{१}{\text{कोज्याञ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याञ}}} = \frac{\text{ज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\text{स्पञ}}{\text{छेञ}} = \frac{\text{स्पञ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{ञ}}}$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \times \text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\text{कोज्याञ}}{\frac{१}{\text{कोस्प}}}$$

$$\begin{aligned} \text{ज्याञ} &= \frac{\text{ज्याञ} \times \frac{१}{\text{ज्याञ}}}{\frac{१}{\text{ज्याञ}}} = \frac{१}{\frac{१}{\text{ज्याञ}}} = \frac{१}{\text{कोछेञ}} \\ &= \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{ञ}}} \end{aligned}$$

$$\text{ज्याञ} = \frac{\text{ज्याञ} \times \text{कोज्याञ}}{\text{कोज्याञ}} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्याञ}} \times \text{कोज्याञ}}{\frac{१}{\text{ज्याञ}}} = \frac{\text{छेञ} \times \text{कोज्याञ}}{\text{कोछेञ}}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{1}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\sqrt{\text{छे}^2\text{अ} - 1}}{\text{छेअ}}$$

$$(२) \text{ कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \frac{1}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{1}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{1}{\text{छेअ}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{स्प}^2\text{अ}}}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{1}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्याअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ} ।$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्याअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} \\ &= \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} = \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}} ।\end{aligned}$$

$$(३) \text{ स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}} ।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}} ।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}} = \frac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}} ।$$

$$\begin{aligned} \text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\frac{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेअ}}{\text{कोस्पअ}} \end{aligned}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned} \text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \\ &= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोस्पअ}} \quad | \quad १ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्पअ} &= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{कोज्याअ}^२}}{१ - \text{उअ}} = \frac{\sqrt{१ - (१ - \text{उअ})^२}}{१ - \text{उअ}} \\ &= \frac{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उअ}^२}}{१ - \text{उअ}} \quad | \end{aligned}$$

(४) कोस्पअ =  $\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$  । इतोऽग्रे पूर्वोक्तस्पर्शरेखास्वरूपे बहुधा हर-

भाज्ययोः परिवर्तनादेव सर्वमुपपद्यते ।

$$(५) \text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \sqrt{१ + \text{स्पअ}^२} \quad |$$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याअ}} \quad |$$

$$\begin{aligned}\text{छेज} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} \times \text{ज्याअ}} \\ &= \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोस्पअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेज}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\begin{aligned}\text{छेज} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} \\ &= \frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{छेज} &= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ} \times १}{\text{कोज्याअ} \times \text{ज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}} \\ &= \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोछेज}}{\text{कोज्याअ}} ।\end{aligned}$$

$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}} ।$$

$$\text{छेज} = \frac{\text{कोछेज}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{छेज} = \frac{\text{कोछेज}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{\text{कोछेज}}{\sqrt{\text{कोछेज}^२ - १}} ।$$



$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोज्याज}} = \frac{\text{ज्याज} \times १}{\text{कोज्याज} \times \text{ज्याज}} = \text{स्पज} \times \text{कोछेज} ।$$

$$\text{छेज} = \frac{१}{\text{कोज्याज}} = \frac{१}{१ - \text{उज}} ।$$

$$(६) \text{कोछेज} = \frac{१}{\text{उज्याज}} = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{ज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{ज्याज}} = \frac{\text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्याज}} = \frac{\text{छेज}}{\text{स्पज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{ज्याज}} = \frac{\text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}} = \frac{\text{कोस्पज}}{\text{कोज्याज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{ज्याज}} = \frac{\text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}} = \frac{१}{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्याज} \times \text{स्पज}} ।$$

$$\text{कोछेज} = \frac{१}{\text{उज्याज}} = \frac{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज} \times १}{\text{ज्याज} \times \text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}$$

$$= \frac{\text{ज्याज} \times \text{कोज्याज}}{\text{कोज्याज} \times \text{ज्याज}} = \frac{\text{स्पज} \times \text{कोस्पज}}{\text{ज्याज}} ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times \text{छेअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}}{\text{स्पअ}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{\text{छेअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\sqrt{\text{छे}^२\text{अ} - १}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ} \times १}{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्पअ} \times \text{छेअ} ।$$

$$\begin{aligned} \text{कोछेअ} &= \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\sqrt{१ - (१ - \text{उअ})^२}} \\ &= \frac{१}{\sqrt{२\text{उअ} - \text{उ}^२\text{अ}}} । \end{aligned}$$

$$(७) \text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} ।$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}} ।$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{१}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} ।$$

$$\text{सभ} = १ - \text{कोज्याभ} = १ - \frac{\text{ज्याभ} \times \text{कोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

$$= १ - \frac{१}{१} \times \frac{\text{कोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

$$= १ - \frac{१ \times \text{कोस्पभ}}{\text{कोछेभ}} = १ - \frac{\text{कोस्पभ}}{\text{कोछेभ}}$$

$$= १ - \frac{\text{कोस्पभ}}{\sqrt{१ - \text{कोस्प}^2\text{भ}}}$$

$$\text{सभ} = १ - \frac{\text{कोस्पभ}}{\text{कोछेभ}} = १ - \frac{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{भ} - १}}{\text{कोछेभ}}$$

अथ

(३०) प्रक्रमोक्तद्विगुणकोणस्य ज्यादिस्वरूपाणां वैशद्यम् ।

$$(१) \text{ज्या} २\text{अ} = २\text{ज्याभ} \cdot \text{कोज्याभ} = \frac{२\text{ज्याभ} \cdot \text{ज्याभ} \cdot \text{कोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

$$= \frac{२\text{ज्या}^2\text{भ}}{\text{ज्याभ}} = \frac{२\text{ज्या}^2\text{भ}}{\text{स्पभ}}$$

कोज्याभ

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रकोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{रकोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रज्याअ}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{रज्याअ}}{\text{छेअ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रकोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{रकोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{छे}^2\text{अ}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{छे}^2\text{अ}} = \frac{\text{रस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^2\text{अ}}} ।$$

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \text{रज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{\text{र}}{\frac{१}{\text{ज्याअ कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{2}{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्याअ.कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{2}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{2}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} \quad |$$

$$\text{ज्यारअ} = 2\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ} = \frac{2\text{ज्याअ.ज्याअ.कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{2\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \frac{1}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{2\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^2\text{अ}} \quad |$$

$$\text{ज्यारअ} = \frac{2\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^2\text{अ}} = \frac{2\text{कोस्पअ}}{1 + \text{कोस्प}^2\text{अ}} \quad |$$

$$(2) \text{ कोज्यारअ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = 1 - \text{ज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} \\ = 1 - 2\text{ज्या}^2\text{अ} \quad |$$

$$\text{कोज्यारअ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - (1 - \text{कोज्या}^2\text{अ}) \\ = \text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 + \text{कोज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 \quad |$$

$$\text{कोज्यारअ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{1 - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1}$$

$$= \frac{1 - \text{स्प}^2\text{अ}}{\text{छे}^2\text{अ}} = \frac{1 - \text{स्प}^2\text{अ}}{1 + \text{स्प}^2\text{अ}} \quad |$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\frac{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}{1}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ.ज्याअ}}} = \frac{\frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}}} \\ &= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}} \end{aligned}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ} - 1}{1}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ} - 1}$$

$$= \frac{\frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोस्प}^2\text{अ} + 1}} = \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1}{\text{कोस्प}^2\text{अ} + 1}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1$$

$$= \frac{\frac{2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{2 - \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{2 - \text{छे}^2\text{अ}}{\text{छे}^2\text{अ}}$$

$$\text{कोज्या}^2\text{अ} = 2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1 = \frac{\frac{2\text{कोज्या}^2\text{अ} - 1}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{1}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$\frac{2\cos A - \frac{1}{\cos A}}{1} = \frac{2\cos A - \csc A}{\csc A}$$

$$\cos 2A = \cos A - \frac{1 - 2\sin^2 A}{\sin A} = \frac{1 - 2\sin^2 A}{\sin A}$$

$$= \frac{\csc A - 2}{\csc A}$$

$$\cos 2A = 2\cos A - 1 = \frac{2\cos A - 1}{1} = \frac{2\cos A - 1}{\cos A}$$

$$\frac{2\cos A - \frac{1}{\cos A}}{1} = \frac{2\cos A - \csc A}{\csc A}$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1 - 2\sin^2 A}{1} = \frac{1 - 2\sin^2 A}{\sin A}$$

$$= \frac{\csc A - 2}{\csc A}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या२अ} &= १ - २ज्या^२अ = \frac{१ - २ज्या^२अ}{१} \\ &= \frac{\text{कोछेअ} - २ज्याअ}{\text{कोछेअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (३) \text{ स्प२अ} &= \frac{\text{ज्या२अ}}{\text{कोज्या२अ}} = \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} \\ &= \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ}{१ - \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^२अ}} \\ &= \frac{२स्पअ}{१ - स्प^२अ} \quad | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२}{\frac{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ}{ज्याअ . \text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{२}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} \quad | \end{aligned}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ . \text{कोज्याअ}}{१ - २ज्या^२अ} \quad |$$



$$\frac{२\text{कोज्याअ} - \frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{१} = \frac{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ} = १ - २\text{ज्या}^२\text{अ} = \frac{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^२\text{अ} - २}{\text{कोछे}^२\text{अ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = २\text{कोज्या}^२\text{अ} - १ = \frac{२\text{कोज्या}^२\text{अ} - १}{१}$$

$$\frac{२\text{कोज्याअ} - \frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{१} = \frac{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}}{\text{छेअ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = १ - २\text{ज्या}^२\text{अ} = \frac{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} - २$$

$$= \frac{\text{कोछे}^२\text{अ} - २}{\text{कोछे}^२\text{अ}}$$

$$\text{कोज्या२अ} = १ - २ज्या^२अ = \frac{१ - २ज्या^२अ}{१}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ} - २ज्याअ}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\begin{aligned} (३) \text{ स्प२अ} &= \frac{\text{ज्या२अ}}{\text{कोज्या२अ}} = \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} \\ &= \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ}{१ - \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} \\ &= \frac{२स्पअ}{१ - स्प^२अ} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२}{\frac{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ}{ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}} \\ &= \frac{२}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} । \end{aligned}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^२अ - ज्या^२अ} = \frac{२ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ}}{१ - २ज्या^२अ} ।$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - ज्या^2\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^2\text{अ} - १} ।$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - ज्या^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - १} \\ &= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोस्प}^2\text{अ} - १} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - ज्या^2\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^2\text{अ} - १} \\ &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{२कोज्या}^2\text{अ} - १}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{२ - \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{२ - \text{छे}^2\text{अ}} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प२अ} &= \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - ज्या^2\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{१ - \text{२ज्या}^2\text{अ}} \\ &= \frac{\frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{१ - \text{२ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - २} \\ &= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोछे}^2\text{अ} - २} । \end{aligned}$$

$$(४) कोस्पर्श = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{२\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}} ।$$

एवं स्पष्टमवगम्यते यत् स्पर्शरेखाया हरभाज्ययोः परिवर्तनात् कोटिस्पर्शरेखा भवत्यतः पूर्वकृतस्पर्शरेखास्वरूपाणां हरभाज्ययोः परिवर्तनादेव सर्वेषां कोटिस्पर्शरेखास्वरूपाणां सिद्धिः सुखेन संपाद्या ।

$$(५) छे२अ = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}$$

$$= \frac{\frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{छे}^2\text{अ}}{२ - \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\text{छे}^2\text{अ}}{२ - \text{छे}^2\text{अ}} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^2\text{अ} - १} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^2\text{अ}} \text{ एते तु पूर्वकृत-}$$

वैशयादतिविशदे ।

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{ज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} = \frac{1 + \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}}{1 - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}} \\
 & = \frac{1 + \text{स्प}^2\text{अ}}{1 - \text{स्प}^2\text{अ}} ।
 \end{aligned}$$

$$\text{छे२अ} = \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याअ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{1}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} + 1}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} - 1}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} + 1}{\text{कोस्प}^2\text{अ} - 1} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}}}{\frac{१ - २\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}}} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} - २} = \frac{\text{कोछे}^२\text{अ}}{\text{कोछे}^२\text{अ} - २} ।$$

$$(६) \text{कोछे२अ} = \frac{१}{\text{ज्या२अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१ \times १}{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = १ \text{ छेअ} = \text{कोछेअ} ।$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{\text{ज्या२अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{ज्याअ}} ।$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{२\text{कोज्याअ}} ।$$

$$\text{कोछे२अ} = \frac{१}{\text{ज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\frac{२\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{स्पअ} \times \text{कोज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{छे}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} = \frac{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}{२\text{स्पअ}} ।$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोटेरज} &= \frac{1}{\text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} = \frac{1 \times 1}{1 \times \text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} \\
 &= \frac{1}{\text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} = \frac{\text{ज्या}^2\text{अ} + \text{कोज्या}^2\text{अ}}{2\text{कोज्याज} \cdot \text{ज्याज}} \\
 &= \frac{\frac{\text{ज्याज}}{\text{कोज्याज}} + \frac{\text{कोज्याज}}{\text{ज्याज}}}{2} = \frac{\text{स्पज} + \text{कोस्पज}}{2} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोटेरज} &= \frac{1}{\text{रज्याज} \cdot \text{कोज्याज}} = \frac{1}{\text{रज्या}^2\text{अ} \cdot \frac{\text{कोज्याज}}{\text{ज्याज}}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याज}}} = \frac{\text{कोटे}^2\text{अ}}{2\text{कोस्पज}} = \frac{1 + \text{कोस्प}^2\text{अ}}{2\text{कोस्पज}} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (७) \quad \text{उरज} &= 1 - \text{कोज्यारज} = 1 - (\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}) \\
 &= 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ} = 2\text{ज्या}^2\text{अ} । \\
 \text{उरज} &= 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ} \\
 &= 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} + 1 - \text{कोज्या}^2\text{अ} \\
 &= 2 - 2\text{कोज्या}^2\text{अ} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{उरज} = 2\text{ज्या}^2\text{अ} &= \frac{2\text{ज्या}^2\text{अ}}{\frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{1}} = \frac{2\text{स्प}^2\text{अ}}{\text{छि}^2\text{अ}} = \frac{2\text{स्प}^2\text{अ}}{1 + \text{स्प}^2\text{अ}} । \\
 &\quad \cdot \text{कोज्या}^2\text{अ}
 \end{aligned}$$

$$\text{च२अ} = \text{रज्या}^२\text{अ} = \frac{\text{रज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्याअ, कोज्याअ}} = \frac{\text{रज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \\ = \frac{१}{\text{ज्याअ, कोज्याअ}} = \frac{१ \times १}{१ \times \text{ज्याअ, कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रस्पअ}}{१} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{ज्या}^२\text{अ}} + \frac{\text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्याअ, कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{रस्पअ}}{\text{ज्याअ} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{\text{रस्पअ}}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{च२अ} = \text{रज्या}^२\text{अ} = \frac{२}{१} = \frac{२}{\text{कोछे}^२\text{अ}} = \frac{२}{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}} ।$$

$$\text{उ२अ} = \text{रज्या}^२\text{अ} = \frac{\text{रज्याअ}}{१} = \frac{\text{रज्याअ}}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\text{च२अ} = \text{रज्या}^२\text{अ} = \frac{\text{रज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ}} = \frac{\text{रस्प}^२\text{अ}}{\text{छे}^२\text{अ}} = २ \frac{\text{स्प}^२\text{अ}}{\text{छे}^२\text{अ}}$$

$$= २ \frac{\text{छे}^२\text{अ} - १}{\text{छे}^२\text{अ}} ।$$



$$\text{स२अ} = \text{२ज्या}^2\text{अ} = \frac{\frac{\text{२ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = २ \frac{\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २ \frac{\frac{१ - \text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = २ \frac{\frac{१}{\text{कोज्याअ}} - \text{कोज्याअ}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= २ \frac{\text{ऐअ} - \text{कोज्याअ}}{\text{ऐअ}} ।$$



अथ

३९ पृष्ठस्थ—३२ प्रक्रमोक्तसारण्युत्पादनप्रकारश्चात्रैवान्ते

३३ प्रक्रमस्यापि निवेशः ।

(१) तत्रादावेकस्याः कलाया व्याकोटिज्यानयनम् ।

व्याञ = ३  $\left\{ \sqrt{१ + ज्या२अ} - \sqrt{१ - ज्या२अ} \right\}$  । अत्र यदि \*

$$२अ = १५^{\circ} \text{ अत एव ज्या२अ} = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} = * २५८८१९०४५१०२,$$

इत्यादि ।

$$\text{तथा ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२} = † १३०५२६१९२२२० \text{ इत्यादि} = ज, ।$$

पुनर्यदि ज, अनेन २अ इदमुत्थाप्येत तदा

\* अथावर्गाङ्कानां मवीनगणितरीत्या मूलानयनम् ।

यथा  $\sqrt{२} = १ +$  शेषावयवाः । अत्रावयवा 'दशमलव'-स्य नियमानुसारेण २४) १०० (४

$$\begin{array}{r} ९६ \\ २८१) ४०० (१ \\ २८१ \\ \hline २८२४) ११९०० (४ \\ ११२९६ \end{array}$$

..... ।

$$\text{एवम् } \sqrt{२} = १.४१४..... \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{एवम् } \sqrt{३} = १.७३२..... \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{अतः ज्या } १५ = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} = २५८८..... \text{ इत्यादि ।}$$

† 'क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलात्', 'त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं' वाऽर्धाशयेत्यतः ।

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०६५४०३१२९२३० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_२$$

एवं मुहुरर्धांशज्यायां गृहीतायाम्

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०००५११३२६९०१ \text{ इत्यादि} = \text{ज}_२$$

$$\text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{\circ}} = ०००२५५६६३४५० \text{ इत्यादि} = \text{ज}_१$$

एवमुत्पद्यते ।

अत्र ज<sub>१</sub>, इयं ज<sub>२</sub> अस्या अर्धेन समं भवतीति स्पष्टं दृश्यते ।  
अनेनेदमनुमीयते यत् सूक्ष्मकोणयोरेकस्य अतसंख्यापूरणोऽंशस्तज्या  
भवति तत्संख्यापूरणोऽंशोऽपरकोणस्यापि स्वल्पान्तरात् तज्या भवतीति

$$\frac{१५ \times ६०}{२^{१०}} : \text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} :: १' : \text{ज्या } १'$$

$$\therefore \text{ज्या } १' = \text{ज्या } \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} \times \frac{२^{१०}}{१५ \times ६०}$$

$$= ०००२५५६६३४५०... \times \frac{२५६}{२२५} = ०२९०८८८१९२.....$$

$$\text{एवम् } \therefore \text{कोज्याअ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$\therefore \text{कोज्या } १' = \sqrt{१ - (०२९०८८८१९२...)^२} \\ = ९९९९९९९५७६९२... ।$$

(२) द्वित्रयादीनां कलानामंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

$$\text{ज्या (अ + क)} = * \text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्या (अ - क)}$$

\* अत्र २० प्रक्रमावलोकनतः स्फुटम् ।

$$= * २ज्याअ \left\{ १ - २ज्या^{२\frac{१}{२}}क \right\} - ज्या (अ - क)$$

$$= २ज्याअ - ज्या (अ - क) - ४ ज्याअ \cdot ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

अतो यदा (क) स्थाने १' तथा (अ) स्थाने १', २', ३' इत्याद्याः

स्युस्तदा

$$ज्या२' = २ज्या१' + ज्या (१' - १') - ४ ज्या १' \times ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

$$ज्या३' = २ज्या२' + ज्या (२' - १') - ४ ज्या २' \times ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

$$ज्या४' = २ज्या३' + ज्या (३' - १') - ४ ज्या ३' \times ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

इत्यादि ।

एकस्याः कलाया ज्याया अवगमादत्र ४ज्या^{२\frac{१}{२}}क एतन्मानं सुखेन ज्ञायते तत उक्तयुक्त्या द्विज्यादिकलानां ज्ञानं सुगमम् ।

अनयैव युक्त्यैकस्यांशस्य त्रिशतः कलानां च जीवां विज्ञाय द्विज्यायांशानां जीवाः सुखेन ज्ञातुं शक्याः ।

$$\text{एवं } * \text{ कोज्या (अ + क) } = २कोज्याअ \cdot कोज्याक - कोज्या (अ - क)$$

$$= २कोज्याअ (१ - २ज्या^{२\frac{१}{२}}क) - कोज्या (अ - क)$$

$$= २कोज्याअ - कोज्या (अ - क) - ४कोज्याअ \cdot ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

अतो यद्यत्र क = १', तथा अ = एकद्विज्यादिकलाः स्युस्तदा

$$कोज्या २' = २कोज्या१' - कोज्या (१' - १') - ४कोज्या१' \times ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

$$कोज्या ३' = २कोज्या२' - कोज्या (२' - १') - ४कोज्या२' \times ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

$$कोज्या ४' = २कोज्या३' - कोज्या (३' - १') - ४कोज्या३' \times ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

इत्यादि ।

अतोऽपि ४ज्या^{२\frac{१}{२}}क एतन्मानज्ञानात् द्विज्यादिकलानां कोटि-ज्यावगमः सुगमः । एवमेकस्यांशस्य कोटिज्यायां त्रिशतः कलानां च जीवायां ज्ञातायां द्विज्यादिकांशानामपि कोटिज्याज्ञानं सुलभम् ।

$$* \text{ अत्र २४ प्रक्रमतः } * २ज्या^{२\frac{१}{२}}क = १ - कोज्याक$$

$$* \text{ कोज्याक } = १ - २ज्या^{२\frac{१}{२}}क$$

(३) द्विज्याद्यंशानां प्रकारान्तरेण ज्याकोटिज्यानयनम् ।

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वम् ज्या२अ} = २ज्याअ \cdot \text{कोज्याअ} \\ \text{कोज्या२अ} = २कोज्याअ - १ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{आभ्यामंशद्वयस्य} \\ \text{ज्याकोटिज्ये विज्ञाय} \end{array}$$

$$\text{ततः ज्या ( अ + क )} = \frac{(\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}) (\text{ज्याअ} - \text{ज्याक})}{\text{ज्या ( अ - क )}}$$

$$\text{कोज्या ( अ + क )} = \frac{(\text{कोज्याअ} + \text{ज्याक}) (\text{कोज्याअ} - \text{ज्याक})}{\text{कोज्या ( अ - क )}}$$

आभ्यां ज्यादीनामंशानां ज्याकोटिज्याज्ञानं सुगमम् ।

$$\text{तथा हि ज्या३°} = \frac{(\text{ज्या२°} + \text{ज्या१°}) (\text{ज्या२°} - \text{ज्या१°})}{\text{ज्या१°}}$$

$$\text{ज्या४°} = \frac{(\text{ज्या३°} + \text{ज्या१°}) (\text{ज्या३°} - \text{ज्या१°})}{\text{ज्या२°}} \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या३°} = \frac{(\text{कोज्या२°} + \text{ज्या१°}) (\text{कोज्या२°} - \text{ज्या१°})}{\text{कोज्या१°}}$$

$$\text{कोज्या४°} = \frac{(\text{कोज्या३°} + \text{ज्या१°}) (\text{कोज्या३°} - \text{ज्या१°})}{\text{कोज्या२°}} \text{ इत्यादि ।}$$

अन्यैव युक्त्या सैकज्यादिकलानामेकद्विज्याद्यंशानां ज्याकोटि-  
ज्यावगमः सुगमः । तथाहि—

$$\text{ज्या ( १°, १' )} = \frac{(\text{ज्या १°} + \text{ज्या १'}) (\text{ज्या १°} - \text{ज्या १'})}{\text{ज्या ५९'}}$$

$$\text{ज्या ( १°, २' )} = \frac{(\text{ज्या १°} + \text{ज्या २'}) (\text{ज्या १°} - \text{ज्या २'})}{\text{ज्या ५८'}} \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या } (१^{\circ}, १') = \frac{(\text{कोज्या } १^{\circ} + \text{ज्या } १') (\text{कोज्या } १^{\circ} - \text{ज्या } १')}{\text{कोज्या } ५९}$$

$$\text{कोज्या } (१^{\circ}, २') = \frac{(\text{कोज्या } १^{\circ} + \text{ज्या } २') (\text{कोज्या } १^{\circ} - \text{ज्या } २')}{\text{कोज्या } ५८} \text{ इत्यादि ।}$$

( ४ ) एवमनेन विधिना त्रिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्ये प्रसाध्याग्रे

$$\text{ज्या } ( अ + क ) = २\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक} - \text{ज्या } (अ - क)$$

$$\text{कोज्या } (अ + क) = \text{कोज्या } (अ - क) - \text{ज्याअ} \cdot \text{ज्याक}$$

एतदाधारतः सुखेन ज्याकोटिज्ये अवगन्तव्ये ।

तथा हि, यदि अ = ३०° । क = एकद्विज्यादिकलास्तदा २ज्याअ = १' ।

$$\therefore \text{ज्या } ( ३०^{\circ} । १' ) = \text{कोज्या } १' - \text{ज्या } ( २९^{\circ} । ५९' ) ।$$

$$\text{ज्या } ( ३०^{\circ} । २' ) = \text{कोज्या } २' - \text{ज्या } ( २९^{\circ} । ५८' ) \text{ इत्यादि ।}$$

$$\text{कोज्या } ( ३०^{\circ} । १' ) = \text{कोज्या } ( २९^{\circ} । ५९' ) - \text{ज्या } १'$$

$$\text{कोज्या } ( ३०^{\circ} । २' ) = \text{कोज्या } ( २९^{\circ} । ५८' ) - \text{ज्या } २', \text{ इत्यादि ।}$$

एवमिह केवलं व्यवकलनेन ज्याकोटिज्यावगमः ।

( ५ ) एवं पञ्चचत्वारिंशदंशपर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याकोटिज्याः साध्याः । तदनन्तरम्—

$$\therefore \text{ज्या } ( ४५^{\circ} + अ ) = \text{कोज्या } ( ४५^{\circ} - अ )$$

$$\text{कोज्या } ( ४५^{\circ} + अ ) = \text{ज्या } ( ४५^{\circ} - अ )$$

अतो या एव ४५°पर्यन्तानां सकलानामंशानां ज्याः कोटिज्याश्च ता एव प्रातिलोभ्येन पञ्चचत्वारिंशदंशाधिकानां सकलानमंशानां कोटिज्या ज्याश्च भवन्ति ।

एवं सर्वेषां नवतेरंशानां ज्याकोटिज्यावगमात् तत्सारणीसंपादनं सुशकम् ।

$$( ६ ) \text{ यतः ज्या } ९०^{\circ} + अ = + \text{कोज्याअ} ।$$

$$\text{कोज्या } ( ९०^{\circ} + अ ) = - \text{ज्याअ}$$

$$\text{ज्या } ( १८०^{\circ} + अ ) = - \text{ज्याअ} । \text{ कोज्या } ( १८०^{\circ} + अ ) = - \text{कोज्याअ}$$

ज्या  $(२७०^{\circ} + अ) = -$  कोज्याअ । कोज्या  $(२७०^{\circ} + अ) = +$  ज्याअ  
अतो नवत्यंशपर्यन्तानामंशानां ज्याकोटिज्यासारणीत एव नव-  
त्यधिकानामप्यंशानां ज्याकोटिज्यावगमः सुशकः ।

( ७ ) स्पर्शरेखाणां कोटिस्पर्शरेखाणां च सारणीसंपादनम्

$$\text{स्पर्श} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोस्पर्श} = \frac{\text{को-ज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

एतदाधारतः सुशकम् ।

(८) एवं छेदनरेखाणां कोटिच्छेदनरेखाणां चोत्क्रमज्यानां कोट्यु-  
त्क्रमज्यानां च सारणी—

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \quad \text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} \quad \text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ}$$

$$\text{कोउअ} = १ - \text{ज्याअ}$$

आभ्यधतमृभ्यस्तत्तदुन्मितिभ्यः संपादयितुं सुशका ।

इति कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारः ।

३३ । पूर्वसाधितज्यादीनां गुणनभजनाद्यपेक्ष्य तत्प्रघात-  
मापकानां गुणनभजनादिकेऽत्यल्पायासः स्यात् किन्तु कोणी-  
यज्यादीनां प्राय एकान्पत्वात् तत्प्रघातममापका ऋणगता  
भवन्त्यतः कोणीयज्यायाः  $१०^{१०}$  एतद्व्यासार्धपरिणताः कृत्वा  
तादृशानां प्रघातमापकाः गणितलाघवाय सारण्यां लिख्यन्ते ।

त्रिकोणमितिसहायकं नवीनगणितम् ।

इह त्रिकोणमितौ पाश्चात्यगणितसंकेतानभिज्ञानां बहुधा  
प्रघातमापकाङ्गविचारे बुद्धिप्रागल्भ्यं न जायतेऽतः कतिचन  
तत्संकेतविषयाः प्रदर्श्यन्ते ।

घातवृद्धिः = Involution.

(१) यदि कश्चिदङ्गस्तेनैव तद्गुणेणेत्यादिभिर्गुण्यते तदा स  
तद्घाताङ्गपर्यन्तं वर्धयत इत्यतः सा घातवृद्धिरित्युच्यते ।

यथा—  $अ \times अ = अ^2$ , अत्र २ इति द्विघातः । एवम्  
 $अ \times अ \times अ = अ \times अ^2 = अ^3$ , ३ इति त्रिघातः । एवं यथेष्टं भवितु-  
 मर्हति ।

(२) घातद्वयौ घनर्णत्वं तद्घाताङ्कत एवावगम्यतेऽर्थाद्  
 घाताङ्के विषये तथा तदङ्कस्यर्णत्वे तत्फलमृणमन्यथा धनम् ।

यथा—  $-अ \times -अ \times -अ = -अ^3$ ,

$-अ \times -अ \times -अ \times -अ = अ^4$ , एवं सर्वत्र ।

(३) द्वयोर्घातवर्धिताङ्कयोर्घाते क्रियमाणे तदङ्कस्योपरि  
 द्वयोर्घातमापकाङ्कयोर्योगाङ्कदानेन वर्धिताङ्कघातो भवति ।

यथा—  $अ^२ \times अ^२ = अ^{२+२} = अ^४$ ,

$अ^२ \times अ^३ = अ^{२+३} = अ^५$ , एवमन्यदपि ।

(४) वर्धिताङ्कभागहारे भाज्यहारयोर्घाताङ्कवियोगाल्लब्धिः  
 संपद्यते ।

यथा—  $\frac{अ^३}{अ^२} = अ^{३-२} = अ^१ = अ$  ।

$$\frac{अ^२}{अ^३} = अ^{२-३} = अ^{-१} = \frac{१}{अ} ।$$

$$\frac{अ^२}{अ^२} = अ^{२-२} = अ^० = १ ।$$

$$\text{एवम् } \frac{अ}{अ} = \frac{अ^१}{अ^१} = अ^{१-१} = अ^० = १ ।$$

$$\therefore \frac{अ^३}{अ^२} = \frac{अ \times अ \times अ}{अ \times अ} = अ \quad \therefore अ^१ = अ ।$$

\* अ-कारस्योपरि द्वित्र्याद्यङ्काः स्थाप्यन्ते । ते घातक्षापका वा  
 घातमापकाः ( Powers ) इत्युच्यन्ते ।



$$\therefore \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a}{a \times a \times a} = \frac{1}{a} \therefore a^{-1} = \frac{1}{a} ।$$

$$\therefore \frac{a^2}{a^2} = \frac{a \times a}{a \times a} = 1 \therefore a^0 = 1 ।$$

(५) उक्तनियमानुमृत्यैव कतिचनान्ये विषया अपि तत्प्रयोजनकाः प्रदर्श्यन्ते ।

यथा—  $a^2$ , इत्यत्र घाताङ्को ५, ६, ७.....!...इत्यादि यथेष्टं भवितुमर्हति, सत्र यदि ५, ६, ७.....न-पर्यन्तं भवेत् तदा  $a^2 \times a^2 \times a^2 \dots\dots\dots a^n$  । अत्रैव यदि कल्प्यते ५ = न, ६ = म, ७ स, तदा  $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^n \times a^m \times a^s = a^{n+m+s}$  ।

$$\text{एवमेव } \frac{a^2 \times a^2}{a^2} = \frac{a^n \times a^m}{a^s} = \frac{a^{n+m}}{a^s} = a^{n+m-s} ।$$

$$\text{एवम् } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}} ।$$

(६) घातज्ञापकाङ्कवैचित्र्यं प्रदर्श्यते ।

यथा—  $a = a^1$ , भिन्नयोगक्रमात्  $1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$

$$\therefore a^1 = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$$

$$\therefore \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \text{ इदं वर्गमूलज्ञापकं चिह्नम् ।}$$

$$\text{एवं यदि } 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{ तदा } a^1 = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \text{ इदं घनमूलज्ञापकम् ।}$$

अथ लघुरिक्थगणितम् = Logarithms.

(७) नेव्यगणितं घाताङ्को घातचिह्नं वा तन्मूलाङ्काधारोपरि तस्याङ्कस्य लघुरिक्थं प्रघातमापकं संप्रतीह त्रिकोणमितौ व्यपदिश्यते ।

यथा— $३^{\circ} = ८१$ , अत्र ४ इदं त्र्यङ्काधारोपरि ८१ अस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वाऽस्ति ।

एवमव्यक्तस्थित्या—यदि  $अ^{\text{क}} = न$  तदा क-इदम् अ-आधारोपरि-न-इत्यस्य लघुरिक्थं प्रघातमापको वा . . क = लघु<sub>अ</sub>न ।

(८) द्वयोरङ्गयोरुणनफलस्य लघुरिक्थं तदङ्गयोर्लघुरिक्थयोर्योगेन समो भवति ।

यथा—यदि  $अ^{\text{क}} = न$ ,  $अ^{\text{य}} = म$ , तदा  $न + म = अ^{\text{क}} + अ^{\text{य}}$   
 $= अ^{\text{क+य}}$ , . . क + य = लघु<sub>अ</sub>नम = लघु<sub>अ</sub>न + लघु<sub>अ</sub>म ।

(९) लब्धेर्लघुरिक्थं हरस्य लघुरिक्थेनोनितेन भाज्य-लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा—यदि  $म = अ^{\text{य}}$ ,  $न = अ^{\text{क}}$

. तदा  $\frac{म}{न} = \frac{अ^{\text{य}}}{अ^{\text{क}}} = अ^{\text{य-क}}$ . लघु<sub>अ</sub>  $\frac{म}{न} = लघु<sub>अ</sub>म - लघु<sub>अ</sub>न ।$

(१०) कस्यापि लघुरिक्थं यदीष्टघातवृद्धिपर्यन्तं वर्धयते तदा तत् तद्घातवृद्धिपर्यन्तं वर्धितस्य तस्य लघुरिक्थेन समं भवति ।

यथा—न लघु<sub>अ</sub>म = लघु<sub>अ</sub>(  $म^{\text{न}}$  ) ।

कल्प्यते— $अ^{\text{क}} = म$  . . क = लघु<sub>अ</sub>म,

एवम्  $म^{\text{न}} = ( अ^{\text{क}} )^{\text{न}} = अ^{\text{नक}}$

. . लघु<sub>अ</sub>(  $म^{\text{न}}$  ) = न क = न लघु<sub>अ</sub>म ।

व्यक्तस्थित्या—लघु४८ = लघु(  $२^{\circ} \times ३$  ) = लघु२<sup>३</sup> + लघु३  
 = ४लघु२ + लघु३ ।

$$\begin{aligned}
 \text{लघु } \frac{६३}{४८४} &= \text{लघु } \frac{७ \times ३^२}{२^२ \times ११^२} \\
 &= \text{लघु } ७ + \text{लघु } ३^२ - \text{लघु } २^२ - \text{लघु } ११^२ \\
 &= \text{लघु } ७ + २\text{लघु } ३ - २\text{लघु } २ - २\text{लघु } ११ । \\
 \text{एवम् लघु } \sqrt{१३} &= \text{लघु } १३\frac{१}{२} = ३\text{लघु } १३ ।
 \end{aligned}$$

(११) साधारणतो दशाङ्काधारोपरि लघुरिक्थस्य नियमो-  
ज्जस्ति, यत्राधारो न दत्तस्तत्र दशाङ्कोऽध्याह्रियते ।

(१२) लघुरिक्थसंख्यायां पूर्णाङ्कः 'कैरेक्टोरिस्टिक्'  
(Characteristic) एकत्रान्यो भिन्नाङ्को दशमलवः 'मैण्टीसा'  
(Mantissa) कथ्यते ।

यथा—लघु ७९५ = २.९००३६७१, अत्र द्वयं पूर्णाङ्कः,  
०.९००३६७१ अयं दशमलवाङ्कः ।

नियताङ्कानां नियतचापांशग्यादीनां च लघुरिक्थार्थं तत्सार-  
ण्यबलोक्या ।

(१३) कस्यापि नियताङ्कलघुरिक्थे पूर्णाङ्कः सर्वदाऽधो-  
लिखितनियमानुसारेण ज्ञायते ।

$$\text{यथा—} \therefore १०^० = \quad १ \therefore \text{लघु} \quad १ = ० ।$$

$$\therefore १०^१ = \quad १० \therefore \text{लघु} \quad १० = १ ।$$

$$\therefore १०^२ = \quad १०० \therefore \text{लघु} \quad १०० = २ ।$$

$$\therefore १०^३ = \quad १००० \therefore \text{लघु} \quad १००० = ३ ।$$

$$\therefore १०^४ = \quad १०००० \therefore \text{लघु} \quad १०००० = ४ ।$$

$$\therefore १०^५ = \quad १००००० \therefore \text{लघु} \quad १००००० = ५ ।$$

इत्यादि ।

(१) अत एकमारभ्य दशपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं शून्यत एकपर्यन्तं भवत्यतः पूर्णाङ्कः शून्यं दशमलवाङ्का भवन्ति ।

(२) दशतः शतपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थमेकद्वयान्तस्तत एकः पूर्णाङ्कस्ततोऽग्रे दशमलवाङ्काः ।

(३) शततः सहस्रपर्यन्तमङ्कानां लघुरिक्थं द्वयत्रयान्तः, एवं सहस्रतो दशसहस्रपर्यन्तमङ्कानां त्रिचतुरन्त एव पूर्णाङ्कानां दशमलवाङ्कानां विवेकः कर्त्तव्यः । अत्र पूर्णाङ्का दशमलवाङ्काश्च धनात्मका एव ।

(४) एकात्पानां भिन्नानां लघुरिक्थमृणात्मकं भवति ।

यथा—  $\therefore १०^० = १, \therefore \text{लघु } १ = १$

$\therefore १०^{-१} = \frac{१}{१०} = ०.१ \therefore \text{लघु } ०.१ = - १$

$\therefore १०^{-२} = \frac{१}{१०^२} = ०.०१ \therefore \text{लघु } ०.०१ = - २$

$\therefore १०^{-३} = \frac{१}{१०^३} = ०.००१ \therefore \text{लघु } ०.००१ = - ३$

एवमन्यदपि ।

(५) एवमिहैकतः  $\frac{१}{१०}$  एतत्पर्यन्तं शून्यत मृणात्मकैकान्तलं लघुरिक्थं भवत्यतस्तस्य पूर्णाङ्के मस्तकोपरि तिर्यमेत्वा दीयते ।

यथा—  $- १ + ( \text{यत्किञ्चिदशमलवाङ्कः} )$

अतोऽत्र पूर्णाङ्कः  $= \bar{१}$ , एवम्  $\bar{२}$ ,  $\bar{३}$  इत्यादि ।

अथ

## चतुर्थोऽध्यायः ।

अत्र त्रिभुजगणितं ततो वंशादीनां दैर्घ्योच्छयाद्यवगमकोदाहरणानि चोच्यन्ते ।

त्रिभुजगणितम् ।

५४ । त्रिभुजस्य पण्णामवयवानामन्यतमेभ्यस्त्रिभ्योऽवयवेभ्यः शेषावयवज्ञानाय यद्वर्ण्यते तत् त्रिभुजगणितसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणत्रयमात्रज्ञाने शेषावयवानामनियतत्वात् तत्र त्रिभुजगणितप्रसक्तिः ।

१ जात्यत्रिभुजगणितम् ।

५५ । जात्यत्रिभुजे एकावयवः समकोणत्वाज्ज्ञात एव शेषाणामन्यतमाभ्यां कोणद्वयेतरावयवाभ्यां शेषावयवावगमः (३७)प्रक्रमतः सुश्रक्तः ।

तथा हि, प्रथमः प्रकारः—

कल्प्यताम् अमुजो ज्ञातः, तत्संमुखः आकोणश्च ज्ञात इति तदा

$$\left\{ \begin{array}{l} \therefore \text{आ} + \text{का} = \text{गा} = ९०^{\circ} \\ \therefore \text{का} = ९०^{\circ} - \text{आ}, \text{ एवं काकोणो ज्ञायते } \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{एवम्} \quad \therefore \quad \text{स्पआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} \quad \therefore \text{क} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} \\ \text{तथा} \quad \text{ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \quad \therefore \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \end{array} \right\} \text{अत्र}$$

स्पआ, ज्याआ अनयोरिष्टन्यासार्धे(त्रि)परिणामितयोः सिद्धे क, ग माने

$$\text{क} = \frac{\text{अ}}{\frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}}} = \frac{\text{त्रि-अ}}{\text{स्पआ}} \quad \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}} = \frac{\text{त्रि-अ}}{\text{ज्याआ}} \quad ।$$

अत्र किल त्रिव्या १०<sup>१०</sup> एतावती कल्प्यते तस्या दशमूलकः  
प्रघातमापको दश भवन्ति । अतः कमानस्य प्रघातमापकः = प्रघादक  
= १० + प्रघादअ - प्रघादस्पआ ।

एवं गमानस्य प्रघातमापकः = प्रघादग  
= १० + प्रघादअ - प्रघादज्याआ

एवं सर्वत्र प्रघातमापकरूपविधानमवगम्यम् ।  
एव शेषभुजौ ज्ञायेते ।

उदा० । अ† = १२० । आ = ४५° । १४' । २३" शेषावयवाः क  
इति प्रभः ।

अत्र का = ९०° - ४५° । १४' । २३" = ४४° । ४५' । ३७"  
तदा प्रघादक = १० + प्रघादअ - प्रघादस्पआ  
= १० + २०७९१८१२ - १०००३६३४२  
=  $\begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - १०००३६३४२ \end{cases}$   
= २०७५५४७० = प्रघाद११९ . ∴ क = ११९ ।

\* ∴ क =  $\frac{\text{त्रि अ}}{\text{स्पआ}}$  अतोऽत्र मदर्शितलघुरिक्तगणितस्थौ (८, ९)

नियमावबलोक्यौ ।

† प्रघाद इदं विहं दशमूलकप्रघातमापकशोतकम् ।

‡ नियताङ्कानां तथा नियतचापांशान्यादीनां च लघुरिक्तार्थमङ्गल-  
भाषावद्धनियमादिका 'चैम्बर्स-मैथेमेटिकल्-टेबल्स' (Chambers's  
Mathematical Tables) एतन्नामिका सारण्यवलोक्या । तत्र  
दशमलकाङ्कास्तु सन्त्येव पूर्णाङ्कार्य मदर्शितलघुरिक्तगणितस्थ-(१३)  
नियमस्य टिप्पण्यवलोक्या ।

अथ च प्रघाटग = १० + प्रघाटअ - प्रघाटज्याभा

$$= १० + २०७९१८१२ - ९८५१२९४५$$

$$= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - ९८५१२९४५ \end{cases}$$

$$= २२२७८८६७ = \text{प्रघाट} १६९^{\circ} . ग = १६९ ।$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः का = ४४° । ४५' । ३७"

$$क = ११९$$

$$ग = १६९ ।$$

द्वितीयः प्रकारः—

कल्प्यताम् अभुजस्तरसंलग्नः काकोणश्च ज्ञात इति तदाऽत्र  
आ = ९०° - का

$$(प्र० ३७) \left\{ \begin{array}{l} \text{स्पका} = \frac{क}{अ} \therefore क = अ \cdot \text{स्पका} \\ \text{कोज्याका} = \frac{अ}{ग} \therefore ग = \frac{अ}{\text{कोज्याका}} \end{array} \right.$$

क, ग अनयोः प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटस्पका} - १०$$

$$\text{प्रघाटग} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटकोज्याका} ।$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । अ = १२० । का = ४४° । ४५' । ३७" अत्र शेषावयवाः  
क इति प्रभः ।

$$\text{अत्र आ} = ९०^{\circ} - (४४^{\circ} । ४५' । ३७) = ४५^{\circ} । १४' । २३''$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रघाटक} &= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटस्पका} - १० \\
 &= २०७९१८१२ + ९०९६३६५८ - १० \\
 &= \begin{cases} + २०७९१८१२ \\ + ९०९६३६५८ \\ - १० \end{cases} \\
 &= २०७५५४७० = \text{प्रघाट११९} \therefore \text{क} = ११९
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रघाटग} &= १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटकोज्याका} \\
 &= १० + २०७९१८१२ - ९८५१२९४५ \\
 &= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - ९८५१२९४५ \end{cases} \\
 &= २२२७८८६७ = \text{प्रघाट१६९} \therefore \text{ग} = १६९
 \end{aligned}$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ = ४५° १४' २३"

$$\text{क} = ११९$$

$$\text{ग} = १६९ ।$$

तृतीय. प्रकारः—

कल्प्यतां गभुजस्तर्सलगत (आ)-कोणश्च ज्ञाताविति ।

उदाऽत्र का = ९०° - आ

$$\text{ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \therefore \text{अ} = \text{ग} \cdot \text{ज्याआ}$$

$$\text{कोज्याआ} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \therefore \text{क} = \text{ग} \cdot \text{कोज्याआ}$$

प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटज्याआ} - १०$$

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोज्याआ} - १०$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । ग = १६९ । आ = ४५° १४' २३" शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।



$$\text{अत्र का} = ९०^{\circ} - (४५^{\circ} १४' १३'') = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटज्याआ} - १०$$

$$= \begin{cases} + २२२७८८६७ \\ + ९८५१२९४५ \\ - १० \end{cases}$$


---


$$= २०७९१८१२ = \text{प्रघाट१२०, } \therefore \text{अ} = १२० ।$$

$$\text{प्रघाटक} = \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोज्याआ} - १०$$

$$= \begin{cases} + २२२७८८६७ \\ + ९८४७६६०३ \\ - १० \end{cases}$$


---


$$= २०७५५४७० = \text{प्रघाट११९, } \therefore \text{क} = ११९ ।$$

$$\text{एवं सिद्धाः शेषावयवाः का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{अ} = १२०$$

$$\text{क} = ११९ ।$$

चतुर्थः प्रकारः—

कल्प्यताम् अ, गभुजौ ज्ञाताविति

$$\text{तदा ज्याआ} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्, प्रघाटज्याआ = १० + प्रघाटअ - प्रघाटग ।

$$\text{एवम् आकोणे ज्ञाते ततः का} = ९०^{\circ} - \text{आ}$$

$$\text{प्रघाटक} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटस्पआ} ।$$

एवं काकोण-गभुजौ व्यक्तौ भवतः ।

यद्वा  $\text{क}^2 = \text{ग}^2 - \text{अ}^2$  इति क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य ४७ प्रतिज्ञया

सिद्ध्यति । अतः कोणनिरपेक्षविधिनैव कभुजौ व्यक्तौ भवति ।

उदा० । अ = १२० । ग = १६९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned}
 \text{अत्र प्रघाट्याआ} &= १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटग} \\
 &= १० + २०७९१८१२ - २२२७८८६७ \\
 &= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - २२२७८८६७ \end{cases} \\
 &= ९८५१२९४५ = \text{प्रघाट्या} ४५^{\circ} १४' २३''
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{का} = ९०^{\circ} - (४५^{\circ} १४' २३'') = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{अथ च प्रघाटक} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटस्पआ}.$$

$$\therefore \text{क-मातम्} = ११९$$

$$\text{एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\text{का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

$$\text{क} = ११९ ।$$

$$\begin{aligned}
 \text{यद्वा क} &= \sqrt{ग^2 - अ^2} = \sqrt{(१६९)^2 - (१२०)^2} = ११९ \text{ सिद्धः} \\
 \text{स एव भुजः ।}
 \end{aligned}$$

पञ्चमः प्रकारः—

$$\text{कस्यताम् अ, क भुजौ ज्ञाताविति तदा स्पआ} = \frac{अ}{क} ।$$

$$\text{यद्वा प्रघाटस्पआ} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाटक} ।$$

एवम् आ-कोणं ज्ञात्वा सतः

$$\text{का} = ९०^{\circ} - \text{आ}$$

$$\text{तथा प्रघाटग} = १० + \text{प्रघाटअ} - \text{प्रघाट्याआ}$$

एवं का-कोण-ग-भुजौ विज्ञेयौ ।

यद्वा ग<sup>२</sup> = अ<sup>२</sup> + क<sup>२</sup>, एवं क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य (४७) प्रतिज्ञया ग भुजो व्यक्तौ भवति ।

उदा० । अ = १२० । क = ११९ शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघाटस्या = १० + प्रघाटअ - प्रघाटक

$$= १० + २०७९१८१२ - २०७५५४७०$$

$$= \begin{cases} + १२०७९१८१२ \\ - २०७५५४७० \end{cases}$$

$$= १०००३६३४२ = \text{प्रघाटस्य } ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{आ} = ४५^{\circ} १४' २३''$$

$$\therefore \text{का} = ४४^{\circ} ४५' ३७''$$

सथा प्रघाटग = १० + प्रघाटअ - प्रघाटस्याभा । अस्मात् सिद्धं

$$\text{ग-भुजमानम्} = १६९ ।$$

$$\text{यद्वा ग} = \sqrt{(१२०)^2 + (११९)^2} = १६९ \text{ सिद्धः स एव ।}$$

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

जात्यान्निभुजे

ज्ञातावयवाः

क्षेपावयवाः

$$(१) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = २१ \\ \text{आ} = ४६^{\circ} २३' ५०'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ४३^{\circ} ३६' १०'' \\ \text{क} = २० । \text{ग} = २९ \end{array} \right\}$$

$$(२) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १०० \\ \text{आ} = ५४^{\circ} १७' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ३५^{\circ} ४३' \\ \text{क} = ७१९०११५ \\ \text{ग} = १२३१६६६५ \end{array} \right\}$$

$$(३) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १३६ \\ \text{का} = ६३^{\circ} ३१' ८'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = २६^{\circ} २८' ५२'' \\ \text{क} = २७३ । \text{ग} = ३०५ \end{array} \right\}$$

$$(४) \left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = १३५ \\ \text{का} = २५^{\circ} २३' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ६४^{\circ} ३७' \\ \text{क} = ६४^{\circ} ०५४२८ \\ \text{ग} = १४९४२५५७ \end{array} \right\}$$

$$(५) \left\{ \begin{array}{l} ग = ५४^{\circ} २१' \\ आ = ३१^{\circ} ४५' २२.४'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} का = ५८^{\circ} १४' ३७.६'' \\ अ = २८८ \\ क = ४६५.२९ \end{array} \right\}$$

$$(६) \left\{ \begin{array}{l} ग = ९२१७ \\ आ = १^{\circ} ११' ३७'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} का = ८८^{\circ} ४८' २३'' \\ अ = १९२. क = ९२१५ \end{array} \right\}$$

$$(७) \left\{ \begin{array}{l} अ = ४०६० \\ ग = ५७४१ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ४५^{\circ} १०' २५.४'' \\ का = ४४^{\circ} ५९' ३४.६'' \\ क = ४०५९ \end{array} \right\}$$

$$(८) \left\{ \begin{array}{l} क = २२४ \\ ग = ७८२ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ७३^{\circ} २१' १७'' \\ का = १६^{\circ} ३८' ४३'' \\ अ = ७४९.२३५२ \end{array} \right\}$$

$$(९) \left\{ \begin{array}{l} अ = २० \\ क = ९९ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ११^{\circ} २५' १६.३'' \\ का = ७८^{\circ} ३४' ४३.७'' \\ ग = १०१ \end{array} \right\}$$

$$(१०) \left\{ \begin{array}{l} अ = १६ \\ क = ११.५२९ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} आ = ५४^{\circ} ११' २९.६'' \\ का = ३५^{\circ} ४६' ३०.४'' \\ ग = १९.७२१ \end{array} \right\}$$

अथाजाल्यस्रगणितम् ।

५६ । अजाल्यस्रस्य त्रिष्ववयवेषु ज्ञातेषु शेषावयवा ज्ञायन्ते तदन्पेषु ज्ञातेषु वा त्रिष्वपि कोणेषु ज्ञातेषु शेषावयवज्ञानं न भवति ।

अजाल्यस्रगणितस्यानेके प्रकारा भवन्ति तत्तद्व्यन्ते ।

प्रथमः प्रकारः—

यदा ज्यस्र एको भुजः अ, कोणद्वयं च आ, का ज्ञातं भवति ।

तदा  $\therefore$  आ + का + गा =  $180^\circ$   $\therefore$  गा =  $180^\circ - (\text{आ} + \text{का})$

एवं तृतीयकोणो ज्ञायते ।

अथ (३६) प्रक्रमतः  $\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$

$\therefore$  क =  $\frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्याआ}}$  अस्य प्रघातमापकरूपम्

प्रघा<sub>६</sub>क = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्याका - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

साजात्यात् प्रघा<sub>६</sub>ग = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्यागा - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

एव शेषमुजौ ( क, ग ) ज्ञायते

तदा ०(१)अ =  $14^\circ$ , आ =  $67^\circ 12' 18''$ , का =  $43^\circ 10' 18''$

शेषान्वयाः क इति मन्तः ।

अत्र गा =  $180^\circ - (67^\circ 12' 18'' + 43^\circ 10' 18'')$   
 $= 180^\circ - (110^\circ 22' 36'') = 69^\circ 37' 24''$

एवं प्रघा<sub>६</sub>क = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्याका - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

$= 1.1760913 + 9.9030900 - 9.9642379$

$= \begin{cases} + 11.0791813 \\ - 9.9642379 \end{cases}$

$= 1.1149438 = \text{प्रघा}_{६} १३ \therefore \text{क} = १३$

प्रघा<sub>६</sub>ग = प्रघा<sub>६</sub>अ + प्रघा<sub>६</sub>ज्यागा - प्रघा<sub>६</sub>ज्याआ

$= 1.1760913 + 9.9342786 - 9.9642379$

$= \begin{cases} + 11.1103299 \\ - 9.9642379 \end{cases}$

$= 1.1460920 = \text{प्रघा}_{६} १४ \therefore \text{ग} = १४$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः  $\begin{cases} \text{गा} = ५९^{\circ} । २९' । २३.१'' \\ \text{क} = १३ । ग = १४ । \end{cases}$

तदा ०(२)अ = १०।का = १२६°।५२'।११.६"।गा = २५°।३'।२७.४"

शेषावयवाः क इति प्रश्नः ।

अत्र आ = १८०° - (१२६°।५२'।११.६" + २५°।३'।२७.४")  
= १८०° - (१५१°।५५'।३९") = २८°।४'।२१"

ततः प्रघाटक = प्रघाटअ + प्रघाटज्याका - प्रघाटज्याआ  
= १००००००० + ९९०३०९०० - ९६७२६४११

=  $\begin{cases} + १०९०३०९०० \\ - ९६७२६४११ \end{cases}$

= १२३०४४८९ = प्रघाट१७. ∴ क = १७ ।

= प्रघाटग = प्रघाटअ + प्रघाटज्यागा - प्रघाटज्याआ  
= १००००००० + ९६२६८८३६ - ९६७२६४११

=  $\begin{cases} + १०६२६८८३६ \\ - ९६७२६४११ \end{cases}$

= ०९५४२४२५ = प्रघाट९. ∴ ग = ९

एवं सिद्धाः शेषावयवाः  $\begin{cases} \text{आ} = २८^{\circ} । ४' । २१'' \\ \text{क} = १७ । ग = ९ । \end{cases}$

द्वितीयः प्रकारः—

यदा त्र्यस्त्रे भुजौ ( अ, क ) तयोरन्यतरस्य संमुखकोणम् ( आ )  
इति ज्ञातं भवति तदा ( ३७ ) प्रक्रमतः

$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$



$$\therefore \text{व्याका} = \frac{\text{क-ज्यामा}}{\text{अ}}$$

ततः गा = १८०° - ( आ + का ) एवं शेषकोणौ ज्ञेयौ ।

$$\text{अथ} \quad \therefore \frac{\text{ज्यामा}}{\text{ज्यागा}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

$$\therefore \text{ग} = \frac{\text{अ.ज्यागा}}{\text{ज्यामा}}$$

एवं का, ग अनयोर्मानयोः प्रघातमापकरूपे

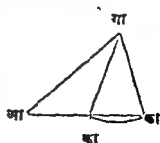
$$\text{प्रघातज्याका} = \text{प्रघातज्यामा} + \text{प्रघातक} - \text{प्रघातअ}$$

$$\text{प्रघातग} = \text{प्रघातज्यागा} + \text{प्रघातअ} - \text{प्रघातज्यामा}$$

अत्रेदमवधेयम् । कोणस्य ज्यायास्तत्कोणोनसमकोणद्वयस्य ज्याया तुल्यत्वाद्वा ज्यातो लब्धं कामनं साशीतिसत्ताच्छुद्धं काकोणस्य द्वितीयमानं भवति । परं यदि क-भुजात् अ-भुजो लघुः स्यात् । अन्यथा नेति । यतः क-भुजात् अ-भुजस्याल्पत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽल्पः स्यात् । ततः पूर्वसाधितयोः का-कोणमानयोर्योगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् तन्मानयोरेकैकस्य का-कोणादल्पत्वेन आ-कोणेन युतस्य समकोणद्वयाल्पत्वाद्वा का कोणमानद्वयसंभवः । परन्तु क-भुजात् अ-भुजस्याधिकत्वे का-कोणात् आ-कोणोऽधिकः स्यात् । अतस्तेन युतस्य का-कोणद्वितीयमानस्य समकोणद्वयाधिकत्वाद्वा द्वितीयमानासंभवः ।

इदं पार्श्ववर्तिक्षेत्रस्थितेः सम्यगवगम्यते ।

कल्प्यताम् आकागा-त्रिभुजे आगा-भुजात् कागा-भुजोऽस्य इति । तदा गा-केन्द्रं मत्वा गाका-ज्यासाधनेन काका अपि कृते स आका रेखायां आ बिन्दोः का-दिशेष द्वितीयस्थाने लगति । तथा चोपिष्टावयवविशिष्टं त्रिभुजद्वयं सं-



पद्यते । तत्र का-कोणस्य द्वे माने अन्योऽन्यस्पर्धिनी स्पष्टं दृश्येते ।

अथ यदि आगा-भुजात् कागा-भुजो महान् स्यात् तदा आ-विन्दोर्यस्यां दिशि का-विन्दुर्वर्तते तदन्यदिशि काका-चापस्य आका-रेखया द्वितीयसंपातः स्यात् । तथा च द्वितीयत्र्यस्यसंभवात् का-कोणद्वितीयमानासंभवः ।

एवं यदि काका-चापः आका-रेखां स्पृशेदेव तदा आगा-भुजात् कागा-भुजस्याल्पत्वेऽपि का-कोण एकविध एव भवेत् । यदि च काका-चापः आका-रेखां न स्पृशेन्न वा छिन्यात् तदा आकागा-त्रिभुजासंभवात् तदुद्दिष्टं खिलं स्यात् ।

उदा० (१) अ = १० । क = १७ । आ = २८° । ४' । २१"

तदा शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रघाट्याका = प्रघाट्याआ + प्रघाटक - प्रघाटअ

$$= ९६७२६४११ + १२३०४४८९ - १०००००००$$

$$= ९९०३०९०० = प्रघाट्या५३° । ७' । ४८'४"$$

$$\text{वा} \quad = प्रघाट्या १२६° । ५२' । ११'६"$$

अत्र क-भुजात् अ-भुजोऽल्पो भवति

$$\text{अतः} \quad का = ५३° । ७' । ४८'४" \text{ वा } १२६° । ५२' । ११'६"$$

एवमिह का-मानं द्विविधं भवति ।

$$\therefore \quad गा = ९८° । ४७' । ५०'६" \text{ वा } २५° । ३' । २७'४"$$

अथ च प्रघाटग = प्रघाट्यागा + प्रघाटअ - प्रघाट्याआ

$$= प्रघाट्या (९८° । ४७' । ५०'६") + प्रघाटअ - प्रघाट्याआ$$

$$= ९९९४८६०४ + १००००००० - ९६७२६४११$$

$$= १३२२२१९३ = प्रघाट२१ . ग = २१$$

पद्मा प्रघाट्या (२५° । ३' । २७'४") + प्रघाटअ - प्रघाट्याआ

$$= ९६२६८८३६ + १००००००० - ९६७२६४११$$

$$= ०९५४२४२५ = प्रघाट९ . ग = ९ ।$$



एवं सिद्धाः शेषावयवाः  $\begin{cases} \text{का} = ५३^{\circ} ७' ४८'' ४'', \text{वा}, १२६^{\circ} ५२' ११'' ६'' \\ \text{गा} = ९८^{\circ} ४७' ५०'' ६'' \text{ वा } २५^{\circ} ३' २७'' ४'' \\ \text{ग} = २१ \text{ वा } ९। \end{cases}$

उदा० (२) अ = १५। क = १३। आ = ६७°। २२'। ४८'५''  
शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः।

अत्र प्रघाट्याका = प्रघाट्याआ + प्रघाटक - प्रघाटअ  
= ९९६५२३७९ + १११३९४३४ - ११७६०९१३  
= ९९०३०९०० = प्रघाट्या ५३°। ७'। ४८'४''

∴ का = ५३°। ७'। ४८'४''।

अत्र क-भुजात् अ-भुजो महानस्ति। अतोऽत्र का-मानमेकविधमेव।

∴ गा = ५९°। २९'। २३'१''।

ततः प्राग्बत् ग = १४।

तृतीयः प्रकारः—

यदा त्रिभुजे भुजौ क, ग, तयोरन्तर्गतकोणश्च आ इति ज्ञायते।

तदा (३६) प्रक्रमतः  $\frac{\text{क} + \text{ग}}{\text{क} - \text{ग}} = \frac{\text{स्प } \frac{१}{२} (\text{का} + \text{गा})}{\text{स्प } \frac{१}{२} (\text{का} - \text{गा})}$

∴ स्प  $\frac{१}{२} (\text{का} - \text{गा}) = \frac{\text{क} - \text{ग}}{\text{क} + \text{ग}} \times \text{स्प } \frac{१}{२} (\text{का} + \text{गा})$

परन्तु  $\frac{१}{२} (\text{का} + \text{गा}) = ९० - \frac{१}{२} \text{आ}।$

∴ स्प  $\frac{१}{२} (\text{का} - \text{गा}) = \frac{\text{क} - \text{ग}}{\text{क} + \text{ग}} \times \text{कोस्प } \frac{१}{२} \text{आ}।$

अस्य प्रपातमापकरूपमिदम्।

प्रघाटस्प  $\frac{१}{२} (\text{का} - \text{गा})$   
= प्रघाटकोस्प  $\frac{१}{२} \text{आ} + \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग}) - \text{प्रघाट}(\text{क} + \text{ग})$  एवम-  
ज्ञातकोणयोरन्तरार्थं ज्ञायते तयोर्योगार्थं तु ज्ञातकोणा-ज्ञातमेवास्ति

$$का = \frac{१}{२} (का + गा) + \frac{१}{२} (का - गा) ।$$

$$गा = \frac{१}{२} (का + गा) - \frac{१}{२} (का - गा) ।$$

प्रथमज्ञातकोणौ ज्ञायेते ।

ततः प्रथमप्रकारेण तृतीयभुजज्ञानं सुलभम् ।

अथात्र यद्यदिष्टावयवैः क्षेत्रकोणनिरपेक्षमेव तृतीयभुजज्ञानमिष्टं तदा तत् (३८) प्रक्रमोक्ताऽस्मात्  $अ^२ = क^२ + ग^२ - २कग \cdot कोज्याआ$ , समीकरणजज्ञायते । परं न ह्यस्य समीकरणस्य प्रघातमापकरूपं सपद्यत इतीदं समीकरणं तथा परिणाम्यते यथाऽस्मात् प्रघातमापकद्वारा तृतीयभुजज्ञानं स्यात् स परिणामो द्वित्रिधः ।

तत्रादावाद्यः प्रदर्श्यते—

$$\begin{aligned} (प. १) अ^२ &= क^२ + ग^२ - २कग \cdot कोज्याआ \\ &= क^२ - २कग + ग^२ + २कग (१ - कोज्याआ) \\ &= (क - ग)^२ + ४कग \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ \\ &= (क - ग)^२ \left\{ १ + \frac{४कग}{(क - ग)^२} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ \right\} \end{aligned}$$

अत्र  $\frac{४कग}{(क - ग)^२} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ$ , इदं धनमस्ति । अतस्तत्स्थाने

(स्प'इ) पश्यते तदा

$$अ^२ = (क - ग)^२ (१ + स्प'इ) = (क - ग)^२ छे'इ ।$$

$$\therefore अ = (क - ग) छेइ ।$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्

$$प्रघातअ = प्रघात(क - ग) + प्रघातछेइ - १० ।$$

$$अथ \therefore स्प'इ = \frac{४कग}{(क - ग)^२} \cdot ज्या^२ \frac{१}{२} आ$$

$$\therefore \text{स्पइ} = \frac{२\sqrt{\text{कग}}}{\text{क} - \text{ग}} \cdot \text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ आ ।}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम्

$$\begin{aligned} \text{प्रघाटस्पइ} &= \text{प्रघाट२} + \frac{१}{२} \text{ प्रघाटक} + \frac{१}{२} \text{ प्रघाटग} \\ &+ \text{प्रघाटज्या } \frac{१}{२} \text{ आ} - \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग}) \end{aligned}$$

एवम् (इ) माने ज्ञाते ततः

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग}) + \text{प्रघाटछेइ} - १० ।$$

अस्मिन् परिणामे यदि (क - ग) अल्प स्यात् तदा (स्पइ) महत् स्यात् ततो लब्धम् (इ) मानं स्थूलं स्यात् ततः (क) मानमपि स्थूलं स्यात् ।

अथातो द्वितीयपरिणाम उच्यते—

$$\begin{aligned} (\text{प}_२) \text{अ}^२ &= \text{क}^२ + \text{ग}^२ - २\text{कग कोज्याआ} \\ &= \text{क}^२ + २\text{कग} + \text{ग}^२ - २\text{कग}(१ + \text{कोज्याआ}) \\ &= (\text{क} + \text{ग})^२ - ४\text{कग कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} \end{aligned}$$

$$= (\text{क} + \text{ग})^२ \left\{ १ - \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} \right\}$$

अथ यतः (क + ग)<sup>२</sup> अस्मात् (४कग) इदं सदैवालपं भवति ।

$$\text{अतः } \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ इदं रूपावलपं स्यात्}$$

$$\therefore \text{कल्प्यताम्— } \frac{४\text{कग}}{(\text{क} + \text{ग})^२} \cdot \text{कोज्या}^२ \frac{१}{२} \text{ आ} = \text{ज्या}^२ \text{इ}$$

$$\text{तदा अ}^२ = (\text{क} + \text{ग})^२ (१ - \text{ज्या}^२ \text{इ}) = (\text{क} + \text{ग})^२ \text{ कोज्या}^२ \text{इ}$$

$$\therefore \text{अ} = (\text{क} + \text{ग}) \text{ कोज्याइ ।}$$

अथ ज्याइ, अ, अनयोर्मानयो. प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघाट्याह} = \text{प्रघाट} २ + \frac{१}{२} \text{प्रघाटक} + \frac{१}{२} \text{प्रघाटग} \\ + \text{प्रघाट}(\text{कोट्या } \frac{१}{२} \text{ आ}) - \text{प्रघाट}(\text{क} + \text{ग}) ।$$

$$\text{प्रघाटअ} = \text{प्रघाट}(\text{क} + \text{ग}) + \text{प्रघाटकोट्याह} - १० ।$$

$$\text{तदा० । क} = ८२ । \text{ग} = २१ । \text{आ} = १०२^{\circ} । ४०' । ४९'४'' \text{ तदा}$$

शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{अत्र प्रघाटस्प } \frac{१}{२}(\text{का} - \text{गा}) &= \text{प्रघाटकोस्प } \frac{१}{२} \text{ आ} \\ &+ \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग}) - \text{प्रघाट}(\text{क} + \text{ग}) \\ &= \text{प्रघाटकोस्प } (५१^{\circ} । २०' । २४'') + \text{प्रघाट} ६१ - \text{प्रघाट} १०३ \\ &= ९^{\circ} ९०३०९०० + १^{\circ} ७८५३२९८ - २^{\circ} ०१२८३७२ \\ &= \begin{cases} + ११^{\circ} ६८८४१९८ \\ - २^{\circ} ०१२८३७२ \end{cases} \\ &= + ९^{\circ} ६७५५८२६ = \text{स्प } २५^{\circ} । २१' । ३५'' । \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{१}{२}(\text{का} - \text{गा}) = २५^{\circ} । २१' । ३५'' ।$$

$$\text{अथ च } \frac{१}{२}(\text{का} + \text{गा}) = ९०^{\circ} - \frac{१}{२} \text{आ} = ३८^{\circ} । ३९' । ३५'३''$$

$$\therefore \text{का} = ६४^{\circ} । ०' । ३८'८''$$

$$\text{गा} = १३^{\circ} । १८' । ३१'८'' ।$$

अतः प्रथमप्रकारेण सिद्धस्तृतीयभुजः अ = ८९ ।

अथाद्यपरिणामवस्तृतीयभुजज्ञानार्थं न्यासः ।

$$\text{प्रघाटस्पह} = \text{प्रघाट} २ + \frac{१}{२} \text{प्रघाटक} + \frac{१}{२} \text{प्रघाटग} + \text{प्रघाटकोट्याह } \frac{१}{२} \text{ आ} \\ - \text{प्रघाट}(\text{क} - \text{ग})$$

$$\begin{aligned} &= ३०१०३०० + ६६११०९६५ + ९५६९०६९५ + ९^{\circ} ८९२५७८१ \\ &\quad - १^{\circ} ७८५३२९८ \\ &= ११^{\circ} ८११६२४७ - १^{\circ} ७८५३२९८ = १०^{\circ} ०२६२९४९ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{स्प} ( ४६^{\circ} १ ४४' ४७'' ) \therefore \text{इ} = ४६^{\circ} १ ४४' ४७'' \\
 \text{अथ प्रघाट} &= \text{प्रघाट} ( क - ग ) + \text{प्रघाट} \text{इ} - १० \\
 &= १^{\circ} ७८५३२९८ + १०^{\circ} १६४०६०२ - १० \\
 &= १^{\circ} ९४९३९०० = \text{प्रघाट} ८९ \therefore \text{अ} = ८९
 \end{aligned}$$

सिद्धस्तृतीयभुजः स एव ।

एवं द्वितीयपरिणामतोऽपि स एव भुजो लभ्यते ।

चतुर्थः प्रकारः—

यदा त्रिभुजस्य त्रयो भुजाः ( अ, क, ग ) ज्ञाता भवन्ति तदा आ-कोणज्ञानमधोलिखिताभिदन्मितिभिः प्रत्येकं जायते ।

$$\text{ग्याआ} = \frac{२}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \quad (१)$$

$$\text{ग्याइआ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{कग}}} \quad (२)$$

$$\text{फोग्याइआ} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{कग}}} \quad (३)$$

$$\text{स्पइआ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}} \quad (४)$$

अत्र प्रथमोन्मितेरुपपत्तिः (३९) प्रक्रमे द्रष्टव्या द्वितीयादीनां च (४०) प्रक्रमे विद्योक्त्या ।

अथ यदा आ-कोणः समकोणमग्नौ न स्यात् तदा प्रथमोन्मिते-  
स्तदानीयनं कर्तुं युज्यते यतः समकोणासन्नकोणाग्याया धनुः सार-  
लीनः सुद्धमं न लभ्यते ।

यदा आ-कोणः समकोणाग्नः स्यात् तदा द्वितीयतृतीयो-  
न्मितिरूपेण प्रत्येकं तदानीयनं कर्तुं युज्यते ।

यदा आ कोण\* समकोणद्वयासन्नो न स्यात् तदा चतुर्थोन्मिते-  
स्तदानयनं कर्तुं युज्यते ।

अथासामुन्मितीनां क्रमेण प्रघातमापकरूपाणि ।

$$(१) \text{ प्रघाट्या आ} = १० + \text{प्रघाट्} २ + \frac{१}{२} \left\{ \text{प्रघाट्स} + \text{प्रघाट्}(स - अ) \right. \\ \left. + \text{प्रघाट्}(स - क) + \text{प्रघाट्}(स - ग) \right\} - (\text{प्रघाट्क} + \text{प्रघाट्ग}) ।$$

$$(२) \text{ प्रघाट्या ३ आ} = \frac{१}{२} \left\{ २० + \text{प्रघाट्}(स - क) + \text{प्रघाट्}(स - ग) \right. \\ \left. - (\text{प्रघाट्क} + \text{प्रघाट्ग}) \right\} ।$$

$$(३) \text{ प्रघाट्कोज्या ३ आ} = \frac{१}{२} \left\{ २० + \text{प्रघाट्स} + \text{प्रघाट्}(स - अ) \right. \\ \left. - (\text{प्रघाट्क} + \text{प्रघाट्ग}) \right\} ।$$

$$(४) \text{ प्रघाट्स् ३ आ} = \frac{१}{२} \left\{ २० + \text{प्रघाट्}(स - क) \right. \\ \left. + \text{प्रघाट्}(स - ग) - \text{प्रघाट्स} - \text{प्रघाट्}(स - अ) \right\} ।$$

साजात्यात् का गा-कोणयोरपि माने एव ज्ञातुं शक्यते ।

उदा० । यत्र त्रिभुजे अ = २५ । क = १७ । ग = २८ ।

तत्र त्रय\* कोणा किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रथमोन्मित्योत्तरावगमाय न्यासः ।

$$स = \frac{१}{२} (२५ + १७ + २८) = ३५ ।$$

$$स - अ = १० ।$$

$$स - क = १८ ।$$

$$स - ग = ७ ।$$

अथ च

$$\begin{aligned} \text{प्रघाट्याआ} &= १० + \text{प्रघाट} + \frac{१}{३} \left\{ \text{प्रघाटस} + \text{प्रघाट}(स - अ) \right. \\ &+ \text{प्रघाट}(स - क) + \text{प्रघाट}(स - ग) - (\text{प्रघाटक} + \text{प्रघाटग}) \left. \right\} , \\ &= १० + ३०१०३०० \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{१}{३} \left\{ १.५४४०६८० + १.००००००० + १.२५५२७२५ + ८४५०९८० \right\} \\ &- (१.२३०४४८९ + १.४४७१५८०) \end{aligned}$$

$$= १०.३०१०३०० + २.३२२२१९३ - २.६७७६०६९$$

$$= ९.९४५६४२४ = \text{प्रघाट्याआ} (६१^{\circ} ५५' ३९'') ।$$

$$\therefore \text{आ} = ६१^{\circ} ५५' ३९'' ।$$

$$\text{ततः प्रथमप्रकारेण सिद्धम् का} = ३६^{\circ} ५२' ११.६५'' ।$$

$$\therefore \text{गा} = ८१^{\circ} १२' ९.३५'' ।$$

अभ्यासार्थमुदाहरणानि ।

उद्दिष्टानयनाः ।

शेषानयनाः ।

$$\begin{aligned} \text{आ} &= ५०० \\ (१) \text{ आ} &= ८५^{\circ} ४७' \\ \text{का} &= ५७^{\circ} २५' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{आ} &= ५०० \\ \text{आ} &= ८५^{\circ} ४७' \\ \text{का} &= ५७^{\circ} २५' \end{aligned}} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{गा} &= ३६^{\circ} ४८' \\ \text{क} &= ४२२.४४८१ \\ \text{ग} &= ३००.३२४७ \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{अ} &= ३२७ \\ (२) \text{ का} &= २६^{\circ} ८' ५५'' \\ \text{गा} &= २३^{\circ} ३२' ५'' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{अ} &= ३२७ \\ \text{का} &= २६^{\circ} ८' ५५'' \\ \text{गा} &= २३^{\circ} ३२' ५'' \end{aligned}} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{आ} &= १३०^{\circ} १९' \\ \text{क} &= १२९ \\ \text{ग} &= १७१.२४७३ \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{अ} &= ८५ \\ (३) \text{ क} &= १०० \\ \text{आ} &= ३७^{\circ} १२९' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{अ} &= ८५ \\ \text{क} &= १०० \\ \text{आ} &= ३७^{\circ} १२९' \end{aligned}} \right\} \dots \left\{ \begin{aligned} \text{का} &= ४५^{\circ} ४३' ६.६'' \text{ वा} \\ &= १३४^{\circ} १६' ५३.४'' \\ \text{गा} &= ९६^{\circ} ४७' ५३.४'' \text{ वा} \\ &= ८^{\circ} १४' ६.६'' \\ \text{ग} &= १३८.६९८७ \text{ वा} \\ &= २०.००७३६ \end{aligned} \right.$$

उदितवयवाः ।

शेषवयवाः ।

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ८५ \\ (४) \text{ क} = २०२ \\ \text{आ} = ११^{\circ} २५' १६'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = २८^{\circ} ४' २१'' \text{ वा} \\ = १५१^{\circ} ५५' ३९'' \\ \text{गा} = १४^{\circ} ०' ३०' २३'' \text{ वा} \\ = १६^{\circ} ३९' ५'' \\ \text{ग} = २७३ \text{ वा} \\ = १२३ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ८९ \\ (५) \text{ क} = ६५ \\ \text{आ} = ३६^{\circ} ५२' ११'' ६'' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = २५^{\circ} ५९' २१'' २५'' \\ \text{गा} = ११^{\circ} ७' ८' २७'' १५'' \\ \text{ग} = १३२ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क} = १२५ \\ (६) \text{ ग} = १५० \\ \text{आ} = ३०^{\circ} \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{का} = ५५^{\circ} १०' २'' \\ \text{गा} = ९४^{\circ} ४९' ५८'' \\ \text{अ} = ७६'' १४३ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १३ \\ (७) \text{ क} = २० \\ \text{गा} = ७५^{\circ} ४५' \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ३६^{\circ} ५२' १२'' \\ \text{का} = ६७^{\circ} २२' ४८'' \\ \text{ग} = २१ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = १०० \\ (८) \text{ क} = १०१ \\ \text{ग} = १०२ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ५९^{\circ} १' २०'' \\ \text{का} = ५९^{\circ} ५९' २५'' \\ \text{ग} = ६०^{\circ} ५९' १५'' \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ३७ \\ (९) \text{ क} = १५ \\ \text{ग} = ४४ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = ५३^{\circ} ७' ४८'' १'' \\ \text{का} = १८^{\circ} ५५' २८'' ७'' \\ \text{गा} = १०७^{\circ} १६' ४३'' \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ} = ३४२०२०१ \\ (१०) \text{ क} = ८६६०२५४ \\ \text{ग} = ९८४८०७८ \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{आ} = २०^{\circ} \\ \text{का} = ६०^{\circ} \\ \text{गा} = १००^{\circ} \end{array} \right.$$



५७ । अजात्यज्यस्य शेषावयवाजात्यज्यस्यगणितेनापि ज्ञातुं शक्यन्ते किन्तु तत्रेष्टकोणात् तत्संमुखभुजे लम्बं निपात्य द्वे ज्यस्यो उत्पादनीये भवत इति विशेषः ।

५८ । अथ त्रिकोणमितेर्यथा वंशगृहपर्वतादीनामौ-  
च्छ्यस्य तत्स्वान्तरस्य चावगमः स्यात् तथोच्यते । तदर्थमादौ  
कस्यचित् सरलप्रदेशस्य दैर्घ्यं कतिपयकोणानां च मानं  
चावश्यमवगम्यं भवति । तत्र प्रदेशदैर्घ्यं तु रज्ज्वा सरलपट्या  
वा गणयन्ति कोणांश्च तुरीयपट्टादियन्त्रैः ।

उदा० (१) । यदि कस्यचित् ( अक ) सरलवंशस्यौच्छ्यं ज्ञातव्यं  
तदा ( अ ) स्थानात् समानभूमौ सरलयष्ट्वा ( अग ) प्रदेशं गणयित्वा  
( ग ) स्थानात् ( क ) वंशामस्योन्नतिं  
तुरीयेण पट्टेन वा विद्वयेत् तदा यदि  
( अग ) दैर्घ्यं ( अ ) तुल्यं स्यात् ।  
( क ) स्य उन्नतिश्च ( क° ) स्यात्  
( गगा ) दृष्ट्युच्छ्रितिश्च ( ग ) स्यात्  
तदा ( प्रक० ५० प्रका० २ )



$$\text{आक} = \text{आगा-स्प} \angle \text{आगाक} = \text{अग-स्प} \angle \text{आगाक} \\ = \text{अ-स्पक}$$

$$\therefore ( \text{अक} ) \text{ औच्छ्यम्} = \text{अ-स्पक} + \text{ग} \\ \text{एवमौच्छ्यं ज्ञायते ।}$$

एवं दृक्समसूत्रादुच्छतरवस्तुनो गणितागतमौच्छ्यमानं दृष्ट्यु-  
च्छ्रायेणाधिकं वास्तवं भवति । दृक्समसूत्रादधस्तनवस्तुनो गणितागतं  
मानं च दृष्ट्युच्छ्रायेण विद्वलेपितं वास्तवं भवतीति ।

यद्यत्र अ = २५ हस्ताः । क = ३०° । ग = ३३ हस्ताः

तदा आक = २५ × स्प३०°

चा प्रघाटआक = प्रघाट२५ + प्रघाटस्प३०° - १०

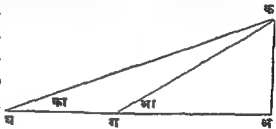
$$= १०३९७९४०० + ९०६१४३९४ - १०$$

$$= १०१५९३७९४ = प्रघाट१४०४३३७६$$

∴ वंशौच्छयम् = १४०४३३७६ + ३५ = १७०९३३७६ हस्ताः ।

उदा० (२) समानभूमौ वर्तमानस्य कस्थचित् प्रासादस्यौच्छयं (अक), दूरत्वम् (अग) चावगम्यम् ।

अत्र कल्प्यताम् (ग)-स्थानात् (क) अप्रवेधे लब्धा अंशाः (आ) । ततः (अ)-भूलाघस्यां दिशि (ग)-स्थानं वर्तते तस्यामेव दिशि (ग)-स्थानात् (घ)-स्थानपर्यन्तम् (अ)-हस्त-मितदेशं गत्वा (घ)-स्थानात् पुनः (क) अप्रवेधे लब्धा अंशाः (का) इति ।



तत्र यदि औच्छयं (अक) = य, दूरत्वम् (अग) = र

$$\text{तदा (३६ प्र०) } \frac{\text{कग}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याकघग}}{\text{ज्याकघ}} = \frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\text{कग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

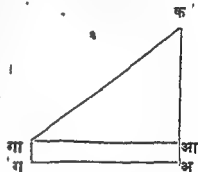
$$\text{य} = (\text{कग.ज्याआ}) = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\text{एषम् } \text{र} = \text{कग.कोज्याआ} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

५७ । अजात्यज्यस्य शेषावयवाजात्यज्यस्रगणितेनापि ज्ञातुं शक्यन्ते किन्तु तत्रेष्टकोणात् तत्संमुखशृङ्गे लम्बं निपात्य द्वे ज्यस्रे उत्पादनीये भवत इति विशेषः ।

५८ । अथ त्रिकोणमितेर्यथा वंशगृहपर्वतादीनामौ-  
च्छस्य तत्स्वान्तरस्य चावगमः स्यात् तयोच्यते । तदर्थमादौ  
कस्य चित् सरलप्रदेशस्य दैर्घ्यं कतिपयकोणानां च मानं  
चावश्यमवगम्यं भवति । तत्र प्रदेशदैर्घ्यं तु रज्ज्वा सरलपट्या  
वा गणयन्ति कोणांश्च तुरीयपट्टादियन्त्रैः ।

उदा० (१) । यदि कस्यचित् ( अक ) सरलवंशस्यौच्छ्यं ज्ञातव्यं  
तदा ( अ ) स्थानात् समानभूमौ सरलपट्या ( अग ) प्रदेशं गणयित्वा  
( ग ) स्थानात् ( क ) वंशाम्बोज्ज्वलिं  
तुरीयेण पट्टेन वा विद्वपेत् तदा यदि  
( अग ) दैर्घ्यं ( अ ) तुल्यं स्यात् ।  
( क ) स्य उन्नतिश्च ( क० ) स्यात्  
( गगा ) दृष्ट्युच्छ्रितिश्च ( ग ) स्यात्  
तदा ( प्रक० ५० प्रका० २ )



आक = आगा.स्प  $\angle$  आगाक = अग.स्प  $\angle$  आगाक  
= अ.स्पक

∴ ( अक ) औच्छ्यम् = अ.स्पक + ग  
एवमौच्छ्यं ज्ञायते ।

एवं एकसमसूत्रादुच्चतरवस्तुनो गणितागतमौच्छ्यमानं दृष्ट्यु-  
च्छ्रायेणाधिकं वास्तवं भवति । एकसमसूत्रादधस्तरवस्तुनो गणितागतं  
मानं दृष्ट्युच्छ्रायेण विलेपितं वास्तवं भवतीति ।

यद्यत्र अ = २५ हस्ताः । क = ३०° । ग = ३३ हस्ताः

तदा आक = २५ × स्प३०°

वा प्रघाटआक = प्रघाट२५ + प्रघाटस्प३०° - १०

$$= १३९७९४०० + ९७६१४३९४ - १०$$

$$= ११५९३७९४ = प्रघाट१४४३३७६$$

∴ शंशौच्च्यम् = १४४३३७६ + ३५ = १७९३३७६ हस्ताः ।

उदा० (२) समानभूमौ वर्तमानस्य कस्यचित् प्रासादस्यौच्च्यं (अक), दूरत्वम् (अग) चावगम्यम् ।

अत्र कल्प्यताम्, (ग)-स्थानात् (क) अग्रवेधे लब्धा अंशाः (भा) । ततः (अ)-मूलाद्यस्यां दिशि (ग)-स्थानं वर्तते तस्यामेव दिशि (ग)-स्थानात् (घ)-

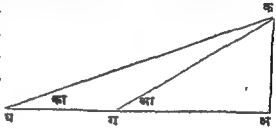
स्थानपर्यन्तम् (अ)-हस्त-

मितदेशं गत्वा (झ)-

स्थानात् पुनः (क)

अग्रवेधे लब्धा अंशाः

(का) इति ।



तत्र यदि औच्च्यं (अक) = य, दूरत्वम् (अग) = र

$$\text{तदा (३६ प्र०)} \quad \frac{\text{कग}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याकघग}}{\text{ज्यागकघ}} = \frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore \text{कग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\therefore \text{य} = (\text{कग.ज्याआ}) = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

$$\text{एवम्} \quad \text{र} = \frac{\text{का.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ - का)}}$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघादय} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्याआ} + \text{प्रघादज्याका} \\ - \text{प्रघादज्या(आ - का)} - १०।$$

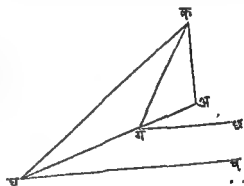
$$\text{प्रघादर} = \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादकोज्याआ} + \text{प्रघादज्याका} \\ - \text{प्रघादज्या(आ - का)} - १०।$$

यदीह— अ = ५०। आ = ३०°। २५'। का = १९°। ३५'।

तदोत्थापनेन सिद्धमौच्छ्यमानम्, य = ४५°१४३ हस्ताः।

तथा (ग)-स्थानात् दूरत्वम्, र = ७६°८९३ हस्ताः।

उदा० (३) कस्याश्चित् (अग) क्रमनिम्नोर्ज्या भूपृष्ठे प्रावण्य  
(अघच) किल (आ) अंशाः, तथा (अघ) भूमौ वर्तमानस्य  
(अक) गृहादेरौच्छ्यदूरत्वयोरवगमाय तद्भूस्थेनैव द्रष्ट्वा (ग)-  
स्थानात् (क) अग्रवेधे कृते लब्धाः किलोन्नतांशाः (कगल) = (का)  
अंशाः, ततः (अग)  
दिश्येव (ग) स्थानात्  
(घ)-स्थान पर्यन्तम् (अ)  
हस्तमितदेश गत्वा पुनः  
(क) अग्रवेधे कृते लब्धाः  
किलोन्नतांशाः (कघच)  
= (गा)। तत्र यदि  
औच्छ्यम् (अक) =  
य, दूरत्वम् (अग) = र,



$$\text{तदा य} = \frac{\text{कग.ज्याअगक}}{\text{ज्याकअघ}} = \frac{\text{कग ज्या (का - आ)}}{\text{कोज्याआ}}$$

$$\text{परन्तु कग} = \frac{\text{कघ.ज्याकघग}}{\text{ज्याकगघ}} = \frac{\text{अ.ज्या(गा - आ)}}{\text{ज्या(का - गा)}}$$

$$\therefore y = \frac{\text{अ.ज्या(का - आ) - ज्या(गा - आ)}}{\text{कोज्याआ.ज्या(का - गा)}} .$$

$$\text{एवम् } r = \frac{\text{कग.ज्याअकग}}{\text{ज्याकअग}}$$

$$= \frac{\text{अ.ज्या(गा - आ) - कोज्याका}}{\text{ज्या(का - गा) - कोज्याआ}} .$$

अनयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे

$$\begin{aligned} \text{प्रघादय} &= \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्या(का-आ)} + \text{प्रघादज्या(गा - आ)} \\ &\quad - \text{प्रघादकोज्याआ} - \text{प्रघादज्या(का - गा)} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रघादर} &= \text{प्रघादअ} + \text{प्रघादज्या(गा - आ)} + \text{प्रघादकोज्याका} \\ &\quad - \text{प्रघादज्या(का - गा)} - \text{प्रघादकोज्याआ} . \end{aligned}$$

$$\text{यद्यत्र अ} = ५० \text{ हस्ताः, आ} = ३०^{\circ}, \text{का} = ६२^{\circ} . ३०', \text{गा} = ५०^{\circ} . १५'$$

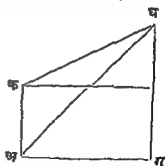
$$\text{तदोत्थापनेन सिद्धमौच्छ्यमानम् य} = ५०^{\circ} . ६०३ .$$

$$\text{एवम् (ग) दूरत्वमानम् र} = ४३^{\circ} . ४८८ .$$

उदा० (४) समभूस्थमवगतौच्छ्यमल्पपर्वतमाकृष्ट भूस्थसरलध्वं-

शस्याप्रमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसू-  
त्रादधरांशान्\*विद्व्वा तद्वंशस्यौ-  
च्छ्यमानं ज्ञातव्यम् ।

यथाऽत्र किल (गध)-पर्वतौ-  
च्छ्यम् = अ । (घ)-स्थानात् (अक)-  
वंशस्य मूलामवेधे लब्धे क्रमेणाध-  
रांशमाने (घअग) = आ, (घअच) =  
का । (अक) वंशौच्छ्यम् = य



\* पर्वतामास्तम्बरूप कीलकार्पं पश्यन् समभूस्थितवंशमूलं यष्ट्या  
विद्वयेत् । एवं तद्वंशाप्रमपि । तत्र दृष्टिलग्नं कीलकाप्रयष्ट्युत्पन्न-  
कोणकोट्यंशा एवाधरांशा इति ।

$$\text{तदा } \frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{१}{\text{ज्याअघ}} = \frac{१}{\text{ज्याआ}} \therefore \text{अघ} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \cdot १$$

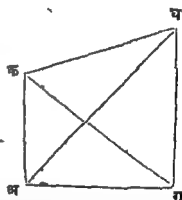
$$\text{एवम् } \frac{\text{अक}}{\text{अघ}} = \frac{\text{ज्याअघक}}{\text{ज्याअकघ}} = \frac{\text{ज्या(आ - का)}}{\text{कोज्याका}} \cdot$$

$$\therefore \text{अक} = \text{घ} = \frac{\text{अ ज्या(आ - का)}}{\text{ज्याआ.कोज्याका}} \text{अस्य प्रघातमापकरूपं} *$$

सुगमतरम् ।

उदा० (५) अज्ञातौ च्छ्याल्पपर्वतशिखरमारुह्य समभूरियतयोरव-  
गतान्तरयोर्वृक्षमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसूत्रादधरांशमाने द्रष्टुर्वृक्षमूलप-  
र्वन्तयोर्दृक्सूत्रयोरन्तर्गतकोणं चावगत्य तत्पर्वतौ च्छ्यं कथमवगम्य-  
मिति प्रश्नः ।

यथा किलात्र अ, क वृक्षमू-  
लयोरन्तरं, अक = अ । (गघ) पर्व-  
तस्य (घ)-शिखरे स्थित्वा अ,  
क मूलयोर्वेधे कृते लब्धे क्रमेण  
दृक्समसूत्रादधरांशमाने आ, का  
तथा  $\angle$  अघक = गा, (गघ)  
पर्वतौ च्छ्यम् = य,



तदा अकघत्रिभुजे अघ = य.कोछेआ, कघ = य.कोछेका †

\* प्रघादय = प्रघादअ + प्रघादज्या(आ - का) - प्रघादज्याआ  
- प्रघादज्याका, एतत् तु सुगमतरमत एव यतस्त्वत्र पर्वतौ च्छ्याधरांश-  
मानकल्पनमपि सुगमम् ।

† त्रिभुजे भुजत्रयमानेषु ज्ञातेषु यस्य कोणस्य कोटिज्याऽपेक्ष्यते  
( ३८ ) प्रक्रमतस्त्वत्कोणात्पादकभुजत्रययोगस्तत्कोणसंमुखभुजवर्गान-

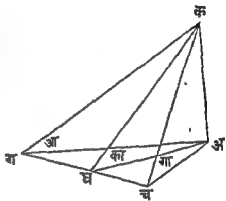
∴ अ<sup>२</sup>

$$= य^२ \cdot कोछे^२ आ + य^२ \cdot कोछे^२ का - २य^२ \cdot कोछे आ \cdot कोछे का \cdot कोज्यागा ।$$

$$\therefore य = \frac{अ}{\sqrt{कोछे^२ आ + कोछे^२ का - २कोछे आ \cdot कोछे का \cdot कोज्यागा}} इत्युत्तरम् ।$$

उदा० (६) (अगच) समभुवि स्थितस्य (अक)-वंशादेः (क)

अग्रे (गघ) सरलरेखास्थेषु  
ग, घ, च, स्थानेषु स्थित्वा  
विष्टे लब्धाः क्रमेणांशाः  
आ, का, गा, । एवं (गघ)  
(घच) रेखयोर्गणने लब्धा  
इस्ताः अ, क । अत्रैभ्यः  
(अक) वंशादेरौच्छ्रयमव-  
गम्यम् ।



तदा कल्प्यतामत्र (अक)  
औच्छ्रयम् = य

$$\therefore अग = य \cdot कोत्पआ, अघ = य \cdot कोत्पका, अच = य \cdot कोत्पगा ।$$

$$अत्र यतः कोज्याअग = \frac{अघ^२ + गघ^२ - अच^२}{२अघ \cdot गघ}$$

$$कोज्याअघच = \frac{अघ^२ + घच^२ - अच^२}{२अघ \cdot घच} ।$$

$$इवम् कोज्याअघग = - कोज्याअघच$$

स्तन्निर्दिष्टकोणात्पादकभुजघातेन द्विगुणेन भक्तस्तत्कोणकोटिज्या

$$यथा— कोज्यागा = \frac{अघ^२ + कघ^२ - अ^२}{२अघ \cdot कघ} अतः स्थापनेन ।$$



$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घघ}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{घच}} *$$

अत्रत्यपदानि पूर्वसाधितैस्तत्तदुन्मानैरुत्थाप्य समीक्रियया लब्ध-  
सौच्च्यमानम्,

$$य = \sqrt{\frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ}\cdot\text{कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क}\text{कोस्प}^2\text{भा}}}$$

उदा० (७) पारेनदि दुर्गमस्थाने वर्त्तमानयोः अ, क वृक्षयोरेन्तर-

$$* \therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घघ}^2}{२\text{अघ}\cdot\text{घच}},$$

$$\therefore \frac{\text{अघ}^2 + \text{गघ}^2 - \text{अग}^2}{\text{गघ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घघ}^2}{\text{घच}},$$

$$\therefore \text{अघ}^2 \text{ घच} + \text{गघ}^2 \text{ घच} - \text{अग}^2 \text{ घच} = \text{अच}^2 \text{ गघ} - \text{अघ}^2 \text{ गघ} - \text{घघ}^2 \text{ गघ},$$

$$\therefore \text{गघ}^2 \text{ घच} + \text{घघ}^2 \text{ गघ} = \text{गघ} \text{ घच} (\text{गघ} + \text{घच}) = \text{अक}(\text{अ} + \text{क})$$

$$= \text{अच}^2 \text{ गघ} + \text{अग}^2 \text{ घच} - \text{अघ}^2 \text{ घच} - \text{अघ}^2 \text{ गघ}$$

$$= \text{गघ}(\text{अच}^2 - \text{अघ}^2) - \text{घच}(\text{अघ}^2 - \text{अग}^2)$$

$$= \text{गघ}(\text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{गा} - \text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{का}) - \text{घच}(\text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{का} - \text{य}^2 \text{ कोस्प}^2\text{भा})$$

$$= \text{य}^2 (\text{गघ कोस्प}^2\text{गा} - \text{गघ कोस्प}^2\text{का} - \text{घच कोस्प}^2\text{का} + \text{घच कोस्प}^2\text{भा})$$

$$= \text{य}^2 (\text{अ कोस्प}^2\text{गा} - \text{अ कोस्प}^2\text{का} - \text{क कोस्प}^2\text{का} + \text{क कोस्प}^2\text{भा})$$

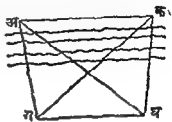
$$= \text{य}^2 (\text{अ कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क कोस्प}^2\text{भा}) = \text{अक}(\text{अ} + \text{क})$$

$$\therefore \text{य}^2 = \frac{\text{अक}(\text{अ} + \text{क})}{\text{अ कोस्प}^2\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\text{कोस्प}^2\text{का} + \text{क कोस्प}^2\text{भा}} \quad \text{पुनस्तद्}$$

(य) मानमाकरो स्पष्टम् ।

† अघ, अग, अच, गघ, घच इमानि स्वरूपाणि ।

प्रदेशस्यावगमाय तत्समभूदेशेऽवाप्तीरे (गघ)-रेखाम् (अ)-हस्तमितां  
गणयित्वा (ग)-स्थानात् गणितयोः  
(अगघ), (कगघ) कोणयोः  
क्रमेणांशाः (आ, का) ततः (घ)-  
स्थानाच्च (कघग), (अघग)  
कोणयोः क्रमेणांशाः (गा, घा) एभ्यः  
(अ, क) दृक्षयोरन्तरमवगम्यम् ।



तदा (अगघ) त्रिभुजात् सिद्धम्  $\frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याअगघ}}{\text{ज्यागअघ}}$

$$\therefore \text{अघ} = \frac{\text{अ.ज्याआ}}{\text{ज्या(आ + घा)}} ।$$

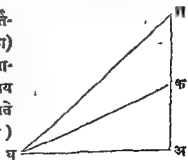
एवमेव (कगघ) त्रिभुजात् सिद्धम्  $\text{कघ} = \frac{\text{अ.ज्याका}}{\text{ज्या(का + गा)}} ।$

एवम् (अघ), (कघ) भुजौ तदन्तर्गतः (अघक) कोणश्चैतेभ्यः  
(अक) भुजावगमः (३८) प्रक्रमतः सुगमः ।

तथा हि—  $\text{अक}^2 = \text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - २\text{अघ.कघ.कोज्याअघक}$

$$\therefore \text{अक} = \sqrt{\text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - २\text{अघ.कघ.कोज्या(गा - घा)}} ।$$

उदा० (८) (घअ) समभुवि वर्त-  
मानस्य (अकग) गृहादेः (अक), (कग)  
प्रदेशौ क्रमेण अ, क हस्तपरिमिता-  
वगमौ । तत्र तद्गृहादेर्दूरत्वावगमाय  
(घ) स्थानात् (कघग) कोणे मापिते  
लब्धा अंशाः (आ) तथा घ (घअ)  
दूरत्वं कियत् स्यादिति प्रश्नः



अत्र किल य = घअ-प्रदेशहस्ताः ।

$$\text{तदा स्पकषण} = \text{स्प(अघण - अघक)} = * \frac{\text{स्पअघण} - \text{स्पअघक}}{१ + \text{स्पअघण} \text{स्पअघक}}$$

$$\text{परमत्र स्पअघण} = \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}}, \text{स्पअघक} = \frac{\text{अ}}{\text{य}}$$

$$\therefore \text{उत्थापनेन, स्पआ} = \frac{\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}} - \frac{\text{अ}}{\text{य}}}{१ + \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{य}}} = \frac{\text{कय}}{\text{य}^2 + \text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$$

अस्मात् समीकरणतो लब्धं (य) मानम्

$$= \frac{\text{क} \pm \sqrt{\text{क}^2 - ४\text{अ}(\text{अ} + \text{क}) \text{स्प}^2\text{आ}}}{२\text{स्पआ}}$$

अत्र (स्पआ) अस्य मानं यथा—  $\frac{\text{क}}{२\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}}$  अस्मा-

दूनं तेन समं वा ततोऽधिकं वा स्यात् तथा (य) मानं कनेण द्विविधमेकविधमसंभवं च बोध्यम् ।

तदेकविधमानं च  $\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$  एतत् स्यात् ।

एतत्प्रश्नोत्तर क्षेत्रमितिरीत्याऽपि ज्ञातित्यवगम्यते ।

तथा हि— (कग) रेखोपरि तथा वृत्तखण्डं कार्यं यथा तद्रेखायां घर्तमानः तत्खण्डपरिधिलग्नः कोणः (आ) अंशपरिमितः स्यात् । ततः (अ) स्थाने लम्बः कार्यः । तेन लम्बेन तद्वृत्तखण्डे छिन्ने स्पष्टेऽस्पष्टे वा (अघ) मानं द्विविधमेकविधमसंभवं वेति स्पष्टमवगतं स्यात् ।

अथ लम्बेन वृत्तखण्डे स्पष्ट एकविधम् (अघ) दूरत्वमानमिदं  $\sqrt{\text{अ}(\text{अ} + \text{क})}$  क्षेत्रमिति तृतीयाध्यायस्य षट्त्रिंशप्रतिज्ञया स्पष्टम् ।

अध्यासार्थमुदाहरणानि ।

(१)\* यस्यायतश्रेत्रस्य कोटिः ५० ( अ ) हस्ताः । तस्य कोट्येक-  
प्रान्ते स्थित्वा संमुखकोटिप्रान्तयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ३०°  
( आ ) तथा च तस्य भुजप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{भुजः} = \frac{\text{अ}}{\text{स्पअ}} = ५०\sqrt{३} = ८६.६०२५४ \text{ हस्ता इत्युत्तरम् ।}$$

(२) पूर्वापरायताया भित्तेर्दक्षसूत्रादुच्छ्रितिः १५ ( अ ) हस्ताः ।  
तस्या भित्तेर्दक्षिणपाद्वे ३५ ( क ) हस्तान्तरे देशे स्थित्वा भुवतारायां  
विलोकितायां सा भित्त्यूर्ध्वप्रान्तलम्ना दृष्टा तत्र तदानीं भुवोन्नतिः  
कियती स्यादिति प्रश्नः ।

$$\text{भुवोन्नतिः} = \text{स्प}^{-१} \frac{\text{अ}}{\text{क}} = २३^{\circ} ११' ५५'' \text{ इत्युत्तरम् ।}$$

(३) कस्यचिद्वंशादेरौच्छ्यावगमाय गणकस्तत्समभुवि सरलप्रदेशं  
२०० ( अ ) हस्तमितं गणयित्वा तत्प्रदेशैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य  
वंशाद्यप्रस्य चान्तर्गतकोणम् ५०° । १२' ( आ ) अंशमितं विध्वा तत्प्र-  
देशापरप्रान्ताच्च तदाद्यप्रान्तस्य वंशाद्यप्रस्य चान्तर्गतकोणम् ४०° ।  
२५' ( का ) अंशमितं वंशाद्यप्रस्य चोन्नतिम् ५७° । ४०' ( गा ) अंश-  
मितां ज्ञातवान् । तथा च तस्य वंशादेरौच्छ्यं कियत् स्यादिति प्रश्नः ।

\* सर्वेषां प्रश्नानां सोपपत्तकान्युत्तराणि प्रमाणे विलोकयानि ।

† यावत्तः कोणस्य चापस्य वा स्पर्शरेखा  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  स्यात् तावतो द्योतकं

स्प - १  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  एतत् स्यात् । एवं ज्या - १  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  । कोज्या - १  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  इत्यादीनि को-

ज्यादीनां कोणां व्यापान् वा द्योतयन्तीति ।

$$\text{वंशाद्यौर्च्यम्} = \frac{\text{अ-ज्याआ-ज्यागा}}{\text{ज्या(आ + का)}} = १२९.८४ \text{ हस्ताः ।}$$

( ४ ) पारेदुस्तरनदि किञ्चिद्गृहादि वर्त्तते तस्यावाक्तीराद्दूर-  
त्वावगमायावारतीरे १०० ( अ ) हस्तमितं तिर्यक्प्रदेशं विगणय्य  
तत्प्रदेशैकैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य गृहादेशचान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे  
क्रमेण कोणमाने ४०° । २५' ( आ ), ३७° । ४८' ( का ) तथा च तत्त-  
त्प्रदेशप्रान्तात् तद्गृहं कियति कियत्यन्तरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{प्रथमप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ-ज्याका}}{\text{ज्या( आ + का )}} = ६२.६१०१ \text{ हस्ताः ।}$$

$$\text{द्वितीयप्रान्ताद्दूरत्वम्} = \frac{\text{अ-ज्याआ}}{\text{ज्या( आ + का )}} = ६६.२२९८२ \text{ हस्ताः ।}$$

( ५ ) कस्याश्चिद्दुस्तरनद्याः पात्रविस्तृत्यवगमायावाक्तीरे ६०  
( अ ) हस्तमितं तिर्यक् प्रदेशं विगणय्य तत्तत्प्रदेशप्रान्तात् तदपरप्रा-  
न्तस्य परतीरवर्त्तिनः कस्याचित् प्रस्तरादेश्वान्तर्गतकोणे विद्धे लब्धे  
क्रमेण कोणमाने ४२° । १७' ( आ ) । ५२° । ३५' ( का ) तथा च  
तस्या नद्याः कियती विस्तृतिरिति प्रश्नः ।

$$\text{नदीविस्तृतिः} = \frac{\text{अ-ज्याआ-ज्याका}}{\text{ज्या( आ + का )}} = ३२.१७७६८ \text{ हस्ताः ।}$$

( ६ ) काश्यां गङ्गापात्रे वर्त्तमानायाः कस्याश्चिन्महातरण्याः  
संमुखतटदेशवर्त्तिनि चत्वारिंशत् ( अ ) हस्तौर्च्ये गृहे स्थितेन मनु-  
जेन तद्गृहोर्ध्वतलदेशाभ्यां प्रत्येकं समसूत्रादधरांशा विद्धाः क्रमेण  
४०° । १५' ( आ ), २५° । ३०' ( का ) एतन्मिता लब्धाः । तथा च  
तद्गृहतलं गङ्गापात्रजलपृष्ठसमदेशात् कियत्यामुच्छ्रित्यां वर्त्तते तदु-  
च्छ्रितिदेशमूलाच्च सा महानौः कियति दूरे वर्त्तत इति प्रश्नः ।

$$\text{चन्द्रिहतिः} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ-का)}} = १५^{\circ}६२२५६ \text{ हस्ताः ।}$$

$$\text{दूरत्वम्} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.कोज्याका}}{\text{ज्या(आ-का)}} = १०८^{\circ}२२८९ \text{ हस्ताः ।}$$

( ७ ) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे ५० ( अ ) हस्तौच्च्यं देवगृहं वर्तते तस्याग्रमूलयोस्तत्पर्वतोपत्यकायां स्थितेन मनुजेन विद्वयोर्लब्धे क्रमेणोन्नतांशमाने ५१° । ४०' ( आ ) । ५०° । १५' ( का ) तथा च तत्पर्वतौच्च्यं कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{औच्च्यम्} = \frac{\text{अ.कोज्याआ.ज्याका}}{\text{ज्या(आ-का)}} = ९६४^{\circ}४१२४ \text{ हस्ताः ।}$$

( ८ ) कस्यचिन्महासरसो दक्षिणोत्तरभागयोरीश्वरप्रासादे वर्तते तयोरन्तरप्रदेशावगमाय तत्सरसः पूर्वभागे तथा वंशो निखनितो यथा स दक्षिणप्रासादात् २०० ( अ ) हस्तान्तरे स्यादुदकप्रासादाच्च ८० ( क ) हस्तान्तरे भवेत् । ततो दक्षिणप्रासादाद्वंशोदकप्रासादयोरन्तर्गत-कोणे विद्धे लब्धा अंशाः २१° । १७' ( का ) अत्र पृच्छा तयोः प्रासादयोरन्तरं कियदिति ।

$$\begin{aligned} \text{अन्तरम्} &= \text{अ.कोज्याका} \pm \sqrt{\text{क}^2 - \text{अ}^2 \text{ज्या}^2 \text{क}} \\ &= २१९^{\circ}९७२ \text{ वा } १५२^{\circ}७५ \text{ हस्ताः ।} \end{aligned}$$

( ९ ) समुद्रान्तः प्रविष्टयोर्भूदेशयोरग्रयोर्महान्तौ शास्मलीवृक्षावासाते । तयोरन्तरप्रदेशावगमाय भूमिस्थात् कस्माच्चित् स्थानात् प्रति-वृक्षपर्यन्तं गणितौ प्रदेशौ क्रमेण १५० ( अ ), २०० ( क ) हस्तात्मकौ स्याताम् । एवं तस्मादेव स्थानात् तयोर्वृक्षयोरन्तरगंतकोणे विद्धे लब्धाः किलांशाः ५०° । २७' ( गा ) तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरप्रदेशः कियानिति प्रश्नः ।

अन्तरप्रदेशः =  $\sqrt{अ^2 + क^2 - २अक}$  कोज्यागा =  $१५५^{\circ} ८७$  हस्ताः ।

( १० ) पर्वतशिखरे प्रस्तरमयस्तम्भो वर्तते तस्यौच्छ्यावगमाय तत्पर्वतनिकटभूमौ स्थित्वा स्तम्भाग्रोन्नतिवेधे लब्धा अंशाः  $३१^{\circ} २०'$  ( आ ) ततः स्तम्भदिश्येवाग्रे सरलभूमौ  $१५०$  ( अ ) हस्तमितदेशं गत्वा स्तम्भाग्रमूलोन्नत्योर्वेधे कृते लब्धाः क्रमेणांशाः  $४५^{\circ} ४२'$  ( का ) ।  $३५^{\circ} ३३'$  ( गा ) तथा च स्तम्भौच्छ्यं कियत् पर्वतौच्छ्यं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{स्तम्भौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ ज्या( का - गा )}}{\text{कोज्यागा.ज्या( का - आ )}} = ६८^{\circ} ०९१ \text{ हस्ताः}$$

$$\text{पर्वतौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ.ज्याआ कोज्याका ज्यागा}}{\text{कोज्यागा.ज्या( का - आ )}} = १५६^{\circ} ८९८४ \text{ हस्ताः}$$

( ११ ) यस्याः क्रमनिम्नभूमेः समानभूमौ प्रावण्यं  $३९^{\circ} १५'$  ( आ ) अंशा यस्याग्राधरप्रान्तो दुस्तरनद्यास्तटं भवति तस्याः परतीरे एकं देवगृहं वर्तते तस्यौच्छ्यावगमाय तदेवगृहसंमुखमेव तत्-क्रमनिम्नोर्व्या उपरितनप्रान्ते गणकेन स्थित्वा देवगृहशिखरे विद्धे लब्धा अधरांशाः  $११^{\circ} ३०'$  ( का ) एवं स देवालयसंमुखदिश्येव तां क्रमनिम्नभूमिं  $२००$  ( अ ) हस्तीमितामवरुह्य तद्दूमेरधरप्रान्तं प्राप्य पुनस्तदेवगृहाग्रे विद्धे लब्धा उन्नतांशाः  $२९^{\circ} २०'$  ( गा ) तथा सति नद्या विस्तृतिः कियती देवगृहस्यौच्छ्यं च कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{नद्या विस्तृतिः} = \frac{\text{अ.ज्या( आ - का ) कोज्यागा}}{\text{ज्या( का + गा )}} = १२४^{\circ} १६ ।$$

$$\text{देवगृहौच्छ्यम्} = \frac{\text{अ ज्या( आ - का ) ज्यागा}}{\text{ज्या( आ + गा )}} = ६९^{\circ} ७७ ।$$

( १२ ) भूमौ निखनितस्य द्वात्रिंशद्वस्त-( अ ) परिमाणौच्छ्यस्य सरलवंशस्य मूलमभितः सर्वासु दिक्षु प्रवण आस्ते । तस्य समानभूमौ प्रावण्यं किल विंशतिरंशाः ( आ<sup>०</sup> ) । अथ तस्मिन् वंशे वातवेगेनैकदेशे भग्ने तस्याग्रं वंशमूलात् षोडश-( क ) हस्तान्तरे लग्नम्, तथा सति वंशो मूलात् कियत्सु हस्तेषु मग्न इति प्रश्नः ।

$$\frac{अ^२ - क^२}{२(अ + क) ज्याआ} = १०^{\circ} २४' ७६ \text{ हस्तेषु भग्न इत्युत्तरम् ।}$$

( १३ ) कस्यचित् पर्वतस्य शिखरे १२० ( अ ) हस्तप्रमाणः प्रस्तरस्तम्भौ वर्तन्ते । तत्पर्वतोपलकास्थेन केनचित् पुरुषेण स्तम्भमूला-प्रयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ९<sup>०</sup> । ४०' ( आ ) ततः स्तम्भ-दिश्येवाग्रे २०० ( क ) हस्तामितसमानदेशं गत्वा पुनः स्तम्भमूला-प्रयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धास्तावन्त एवांशाः । तथा च पर्वतौच्छ्यं कियदिति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{पर्वतौच्छ्यम्} &= \frac{१}{३} \left\{ \sqrt{\left( \frac{अ}{ज्याआ} \right)^२ - क^२ - अ} \right\} \\ &= २८३^{\circ} ०४' ३४'' ५५ \text{ हस्ताः ।} \end{aligned}$$

( १४ ) हस्तशतो-( अ ) चन्द्रस्य राजसदनस्योपरिभागे स्थितो गणकः समभुवि दुर्गमस्थाने वर्तमानयोर्वृक्षयोरन्तरं जिज्ञासुस्तन्मूलयोरधरांशमाने २<sup>०</sup> । ५६' ( आ ), ३<sup>०</sup> । ११' ( का ) एतावती अवगत्य तयोरेवान्तर्गतकोण ९<sup>०</sup> । ४१' ( गा ) अंशमितं दृष्टवान् । तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तरं कियदिति प्रश्नः ।

$$\begin{aligned} \text{अन्तरम्} &= अ \sqrt{\text{कोछे}^२ \text{आ} + \text{कोछे}^२ \text{का} - २ \text{कोछेआ कोछेका कोज्यागा}} \\ &= ३५४^{\circ} ३४' ९'' । \end{aligned}$$



( १५ ) एका पूर्वापराऽन्या याम्योत्तरा चेति द्वे भित्ती द्वादश (अ) हस्तोच्छ्रिते स्तः । तत्र यदा पूर्वापराया भित्तेरुत्तरपार्श्वे छाया हस्तचतुष्क- ( क ) विस्तृता याम्योत्तरायाश्च पश्चिमपार्श्वे छाया हस्तत्रय- ( ग ) विस्तृता स्यात् तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः ।

$$\text{उन्नतांशः} = \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ६७^{\circ} १२' ४८''$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वकाले} \\ \text{उत्तरा दिगंशाः} \end{array} \right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ५३^{\circ} ७' ४८''$$

( १६ ) एका पूर्वापरा द्वादश- ( अ ) हस्तोच्छ्रया भित्तिरस्ति । तस्याः पश्चिमप्रान्ते लग्नां पूर्वदिक्चिह्नात्  $६७^{\circ} १३०'$  ( आ ) अंशान्तरे उत्तरभागे गताऽन्या भित्तिरस्ति साऽपि द्वादशहस्तोच्छ्रया । यदा तयोर्भित्तोश्छाये तद्वहिर्भाग एव तथा संजाते यथा पूर्वापरायाश्छाया हस्तत्रय- ( क ) विस्तृता स्यादन्यायाश्च हस्तचतुष्क- ( ग ) विस्तृता भवेत् । तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति प्रश्नः ।

$$\text{उन्नतांशः} = \text{स्प}^{-1} \cdot \frac{\text{अ. ज्या आ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग. को ज्या आ}}} \\ = ६२^{\circ} ११' ३९''$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वकपाले} \\ \text{उत्तरा दिगंशाः} \end{array} \right\} = \text{ज्या}^{-1} \cdot \frac{\text{का. ज्या आ}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{कग. को ज्या आ}}} \\ = २८^{\circ} १७' ५१''$$

( १७ ) कश्चन गणकः कोणमापकयन्त्रविरहितोऽपि केवल्यष्टयैव दुस्तरनद्याः पात्रप्रमाणं जिज्ञासुर्वास्तरे ( कग ) सरलप्रदेशं  $१७५$  पञ्चसप्तत्युत्तरशतहस्तमितं गणयित्वा परतीरस्य ( अ ) धिक् ( क )-

स्थानाद्यस्यो दिशि वर्त्तते तद्विरुद्धदिशि ( कघ ) प्रदेशं पट्टिहस्तमितं विगणय्य ( गघ ) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१४ ततः ( ग ) स्थानाद्यस्यां दिशि ( अ ) चिह्नं वर्त्तते तद्विपरीतदिशि ( गघ ) प्रदेशं ९० हस्तमितं विगणय्य ( कघ ) प्रदेशे गणिते लब्धा हस्ताः २१५ तथा च तन्नद्याः पात्रप्रमाणं कियदिति प्रश्नः ।

पात्रप्रमाणम् = २००'८६२८ हस्ताः ।

( १८ ) यस्याः समानभूमौ प्रावर्ण्यं विशतिः २०° ( आ ) अंशा-  
स्तादृश्याः क्रमनिम्नभूमेरुपरितनभागेऽस्ति शत- ( अ ) हस्तोच्छ्रयः  
कश्चन तरुः । तस्य संमुखदेश एव क्रमनिम्नोर्व्यां अधस्तनभागे वृक्षा-  
द्वस्तशतद्वया- ( क )न्तरेऽस्त्येकोदकपूर्णां वापी । तथा च तद्वृक्षप्रभा-  
गस्थयोर्वानरयोरेकस्तत्त उत्तीर्य वापीमगादपरश्च ततः किञ्चिदुड्डीय  
कर्णमार्गेण सामगात् । तथा च तयोर्गत्योः समत्वं उड्डीनमानं किय-  
दिति प्रश्नः ।

$$\text{उड्डीनमानम्} = \frac{\text{अक}(१ - \text{ज्याआ})}{२\text{अ} - \text{क}(१ + \text{ज्याआ})} = २८'०९४५४५ ।$$

( १९ ) सरलवंशस्याग्रे ( अ ) हस्तदैर्घ्यस्य समानप्रदेशस्य प्रान्तयोः  
प्रत्येकं स्थित्वा विद्धे लब्धास्तुत्या एव ( आ ) संख्याका उन्नतांशाः ।  
तस्य च मध्यभागे स्थित्वा वंशाग्रे विद्धे लब्धा ( का ) उन्नतांशाः ।  
तथा च तस्य वंशस्योच्छ्रितिः कियसी प्रदेशमध्यस्थानाद्दूरत्वं च  
कियदिति प्रश्नः ।

$$\text{उच्छ्रितिः} = \frac{\text{अ.ज्याआ.ज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}( \text{आ} + \text{का} ) . \text{ज्या}( \text{आ} - \text{का} )}} ।$$

$$\text{दूरत्वम्} = \frac{\text{अ ज्याआ.कोज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या}( \text{का} + \text{आ} ) . \text{ज्या}( \text{का} - \text{आ} )}} ।$$

( २० ) अ, क, ग संज्ञकेषु त्रिषु स्थानेषु ( अ ) स्थानात् ( क ) स्थानं प्राच्यां दिशि वर्तते ( ग ) स्थानं च प्राक्चिह्नतो दक्षिणभागे ( अ ) अंशान्तरे वर्तते । अथ ( कग ) स्थानयोरन्तरप्रदेशः ( अ ) हस्तमितोऽस्ति किन्तु तस्य दुर्गमत्वात् कस्मिंश्चिन्मनुजे ( क ) स्थानात् ( अ ) स्थानं गत्वा ततः ( ग ) स्थानं यावे तेन ( क ) हस्तमितः प्रदेशोऽतिक्रान्तः । तथा च ( क ) स्थानात् ( अ ) स्थानं कियद्दूरे ( अ ) स्थानाच्च ( ग ) स्थानं कियद्दूरे वर्तत इति प्रश्नः ।

$$(क) \text{ स्थानात् } (अ) \text{ स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{१}{२} क \pm \frac{\sqrt{अ^२ - \frac{१}{२} अ क}}{२ कोज्या \frac{१}{२} अ}$$

$$(अ) \text{ स्थानाच्च } (ग) \text{ स्थानस्य दूरत्वम्} = \frac{१}{२} क \mp \frac{\sqrt{अ^२ - \frac{१}{२} अ क}}{२ कोज्या \frac{१}{२} अ}$$

इति त्रिकोणमितितन्त्रे चतुर्थोऽध्यायः ।



अथ  
त्रिकोणमितौ ग्रन्थरुदुर्कविंशतिप्रश्नानां  
सुवासनागणिताभ्यां सहोत्तराणि ।

( १ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



फलप्यते अइडक आयतक्षेत्र यस्यैको भुजः अइ=भ=५० हस्ता ।  
अत्र अइ-भुजस्य इ-प्रान्ते स्थित्वा उक-भुजस्य क-प्रान्तवेधेत लब्धा,  
कोणाशा.=३०°=भा । एवमिह इडक-जात्यभिभुजे

$$\frac{\text{व्या} ६०^{\circ}}{\text{व्या} ३०^{\circ}} = \frac{\text{इउ}}{\text{अइ}} \therefore \text{इउ} = \frac{\text{अइ} \times \text{व्या} ६०^{\circ}}{\text{व्या} ३०^{\circ}}$$

$$= \frac{\text{अइ}}{\text{व्या} ३०^{\circ}} = \frac{\text{अइ}}{\text{स्प} ३०^{\circ}} = \frac{\text{भा}}{\text{स्पभा}} \quad | \quad \text{व्या} ३०^{\circ} = \frac{१}{२},$$

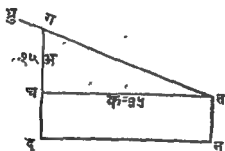
$$\therefore \text{व्या} ६०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२} \therefore \text{स्पभा} = \frac{\frac{१}{२}}{\frac{\sqrt{३}}{२}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$\therefore \text{इवभुजः} = \frac{अ}{१} = अ \times \frac{१}{\sqrt{३}} = ५० \frac{१}{\sqrt{३}} \dots$$

$$= \sqrt{२५०० \times ३} = \sqrt{७५००} \text{ अस्य ८१तमपृष्ठस्थनवीन-}$$

मूलानयनरीत्या मानम् = ८६.६०२५४ ।

( २ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते चतुर्दश-समभूमेरुपरि पूर्वापरायता १५हस्तोच्छ्रिता भि-  
त्तिरस्ति । भित्तिमूलात् च-स्थानाद् दक्षिणतः च-स्थाने उत्थाय रात्रौ  
यष्टुचरं विलोक्यते तदा ध्रुववारा तद्भित्तेरप्रदेशे ग-विन्दावेव  
दृश्यते । अत्र ध्रुवोन्नातिरपेक्ष्या । चक्रे गचतत्रिभुजे अ, क, ग क्रमेण  
भुजाः, कोणाश्च आ, का, गा । ज्ञातत्वात् गा = ९०° ।

$$\text{अत्र } \frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{रपआ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

अतोऽस्य ९७तमपृष्ठस्थपञ्चमोदाहरणानुसारेण प्रपातमापकरूपम् ।

$$\text{प्रपादरपआ} = १० + \text{प्रपादअ} - \text{प्रपादक}$$

$$= १० + १०६०९१३ - ५४४०६१८ = ९.६३२०२९९ ।$$



$$\therefore \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})} = \text{जत}$$

$$\therefore \text{जद} = \frac{\text{जत} \times \text{ज्यागा}}{1} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{ज्यागा}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का}) \times 1}$$

$$\therefore \text{प्रघाटजद} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याभा} + \text{प्रघाटज्यागा} \\ - \text{प्रघाटज्या}(\text{आ} + \text{का}) - \text{प्रघाट१}$$

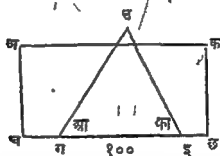
$$= 3010300 + 99266318 + 96644214$$

$$- 99999988 - 10$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 201133629 \\ - 99999988 \\ \hline 1138041 \end{array} \right. = \text{प्रघाटजद} = \text{प्रघाट१२९८४}$$

$$\therefore \text{जद} = 12984$$

(४) मशस्योत्तरम् ।



कल्प्यते अकछच-प्रदेशे किमपि गृहं वर्तते यत्र वेध्यस्थानम् छ । तद्गृहं च यस्या नद्यास्तटेऽस्ति ततोऽन्यस्मिन् पारे अ-स्थाने विद्यमानेन केन चिद्द्रष्ट्वा तत् स्थानं विद्धा तत्र एक शतहस्तमित प्रदेश तिर्यग्-गात्रा पुनस्तदेव स्थानं विद्धम् । तत्र कोणौ  $\angle \text{आ} = 40^\circ$  ।  $25'$   $\angle \text{का} = 37^\circ$  ।  $45'$  अतः स्थानद्वयाद्गृहान्तरे अपेक्ष्ये ।

$$100 = \text{अ} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}\{100 - (\text{आ} + \text{का})\}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})} = \frac{\text{इत}}{\text{ज्याभा}}$$

$$= \frac{\text{गड}}{\text{ज्याका}} \therefore \text{इउ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या(आ+का)}}$$

$$\text{एवम् गड} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ+का)}} \quad ।$$

द्वयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे ।

$$\text{प्रघाटइउ} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याआ} - \text{प्रघाटज्या(आ+का)}$$

$$= '००००००० + ९८११८०३८ - ९९९०७५०२$$

$$= - १७८९४६४ = ८२१०५३६ = \text{प्रघाट}(६६२३)$$

$$\therefore \text{इउ} = ६६२३ ।$$

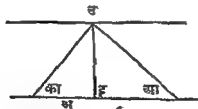
$$\text{एवम् प्रघाटगड} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याका} - \text{प्रघाटज्या(आ+का)}$$

$$= '००००००० + ९७८७३९४६ - ९९९०७५०२$$

$$= - २०३३५५६ = ७९६६४४४ = \text{प्रघाट}(६२६१)$$

एव यत्र ऋणमानं सपद्यते तत्र तद्वरूपाद्विशोध्य धनमानम-  
वगम्यम् ।

### (५) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते नद्या अपरतटस्थः कश्चिद् पदार्थः उ । आ-प्रदेशस्थेन तं  
विध्यता द्रष्टुं आ कोणो ज्ञातस्तथा अ-पट्टिमित हस्तान्तर तिर्यग्गत्वा-  
ततस्तमेव विध्यता तेन का कोणोऽपि ज्ञात । एव त्रिभुजस्य कोणाभ्या  
सदन्तर्वर्तिना भुजेन च नदीविस्तारोऽवगम्य ।



दर्शितक्षेत्रे  $160^\circ - (\text{आ} + \text{का}) = \text{चक्रोणः}$  ।

$$\therefore \text{चका} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का})}$$

$$\therefore \text{नदीविस्तारः} = \text{उइ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} + \text{का}) \times 1}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम् ।

$$\begin{aligned} \text{प्रघातउइ} &= \text{प्रघातअ} + \text{प्रघातज्याआ} + \text{प्रघातज्याका} \\ &\quad - \text{प्रघातज्या}(\text{आ} + \text{का}) - 10 \end{aligned}$$

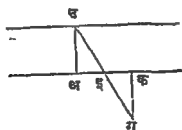
$$\begin{aligned} &= 7721413 + 9276683 + 9299406 \\ &\quad - 92968314 - 10 \end{aligned}$$

$$= 20404962 - 192968314$$

$$= 9074987 = \text{प्रघात} 32.16$$

$$\therefore \text{उइ} = \text{नदीविस्तारः} = 32.16 \dots$$

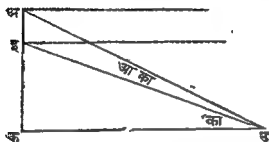
अथ केवलरेखागणितेनास्य प्रकारान्तरोपपत्तिः ।



अन्यथाऽपि नदीविस्तारोऽवगन्तुं शक्यते कल्प्यते-नद्या अपरपार्श्वे कश्चिद् च-बिन्दु । अ-बिन्दुस्थेन द्रष्ट्वा तयाऽवलोक्यते यथा नदीतटरूपायाम् अक-रेखायाम् उभ-रेखा लम्बरूपा भवेत् । तत इ-बिन्दुर्यावति दूरे यदिशि तवाति दूरे यदिश्येव क-बिन्दो गत्वा तया कग रूपाया

लम्बरेखायां स द्रष्टा चलितो यथा इ बिन्दु पश्यन् च बिन्दुमपि पश्येत्  
तदा ( रे. १ अ. २६ प्र ) अउ = कग, अयमेव नदीविस्तार सुसिद्धः ।

(( ६ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अइ = गृहोच्च्यम् = अ । अ-बिन्दुर्गृहोर्ध्वप्रदेशः । इ-बिन्दुर्गृहतल-  
प्रदेशः । उ बिन्दुस्या महानौ । कउ = उच्छ्रितिप्रदेशमूलाभौकाधिष्णि-  
तप्रदेशदूरता ।

अस्मिन् प्रश्ने “गृहतलोर्ध्वदेशाभ्याम्”—इत्यत्र “गृहोर्ध्वतलदेशा-  
भ्याम्”—इत्यनेन भवितव्यम् ।

$$\text{अइउ-त्रिभुजे इउ} = \frac{\text{अइ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या(आ-का)}}$$

$$\text{कइउ त्रिभुजे कइ} = \frac{\text{इउ} \times \text{ज्याका}}{१} = \frac{\text{अइ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}} = \text{उच्छ्रिति} ।$$

$$\text{अत्रैव कउ} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{कोज्याका}}{१ \times \text{ज्या(आ-का)}} = \text{दूरता} ।$$

इयोः प्रपातमापकरूपे ।

प्रपादकइ

$$= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटकोज्याभा} + \text{प्रघाटज्याका} - \text{प्रघाटज्या}(\text{भा} - \text{का}) - १०$$

$$= \text{प्रघाट} ४० + \text{प्रघाटकोज्या}(४०^{\circ} \mid १५') + \text{प्रघाटज्या}(२५^{\circ} \mid ३०')$$

$$\text{प्रघाटज्या}(४०^{\circ} \mid १५' - २५^{\circ} \mid ३०') - १०।$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + ६०२०६०० \\ + ९८८२६५६८ \\ + ९६३३९८४४ \\ - १० \\ - ९४०५८६१७ \end{array} \right\} + २०११८७०१२ = - \frac{१९४०५८६१७}{७१२८३९५}$$

$$= \text{प्रघाट} ५१६२४८$$

$$\therefore \text{कइ} = \text{उच्छ्रुति} = ५१६२४८ \text{ प्रभोत्तरे उच्छ्रुतिः}$$

$$\text{कइ} = १५६२२५६ \text{ प्रायः प्रामादिकीति विज्ञैर्ज्ञेयम्।}$$

$$\text{अथैवं प्रघाटकव}$$

$$= \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटकोज्याभा} + \text{प्रघाटकोज्याका}$$

$$- \text{प्रघाटज्या}(\text{भा} - \text{का}) - १०$$

$$= \text{प्रघाट}(४०) + \text{प्रघाटज्या } ४९^{\circ} \mid ४५' + \text{प्रघाटज्या}(६४^{\circ} \mid ३०')$$

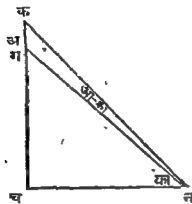
$$- \text{प्रघाटज्या}(४०^{\circ} \mid १५' - २५^{\circ} \mid ३०') - १०।$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + ६०२०६०० \\ + ९८८२६५६८ \\ + ९९५५४८८२ \\ - ९४०५८६१७ \\ - १० \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + २०४४०२०५० \\ - १९४०५८६१७ \\ १०३४३४३३ \end{array} \right\}$$

$$= \text{प्रघाट} १०८२२९७$$

$$\therefore \text{दूरता} = १०८२२९७।$$

( ७ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र (न) पर्वतोपत्यकाभूमौ वेध्यस्थानम् । चग-पर्वतस्य ग-शिखरे  
कग-देवगृहम् । न-स्थानतो देवगृहाप्रवेधेन उन्नतांशाः  $\angle$  कनच = अ,  
एवं देवगृहमूलवेधेन उन्नतांशाः  $\angle$  गनच = का, कग = अ ।

आ = ५१° ४०' । का = ५०° १५' । अ = ५० हस्ताः ।

अत्र कनच-त्रिभुजस्य ज्ञात्वात्

$$\angle \text{कनच} = ९०^\circ - \angle \text{कनच} \therefore \frac{\text{कग}}{\text{ज्या } \angle \text{कनग}} = \frac{\text{गन}}{\text{ज्या } \angle \text{गकन}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})} = \frac{\text{गन}}{\text{कोज्याआ}}$$

$$\therefore \text{गन} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का})}$$

$$\therefore \frac{\text{गन}}{१} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्या } \angle \text{गनच}} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १} = \frac{\text{चग}}{\text{ज्याका}}$$

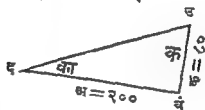
$$\therefore \text{चग} = \text{पर्वतोच्च्यम्} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्याआ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या}(\text{आ} - \text{का}) \times १}$$

$$\therefore \text{प्रघाटचग} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटकोज्याआ} + \text{प्रघाटज्याका}$$

$$= \text{प्रघाटज्या}(\text{आ} - \text{का}) - \text{प्रघाटज्या}(९०)$$

$$\left\{ \begin{array}{r}
 ५९८९७०० \\
 + ९७९२५५६६ \\
 + ९८८९८३७० \\
 + २०३७७३६३६ \\
 - ८३९३१००८ \\
 - १० \\
 \hline
 १९८४२६२८
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \therefore \text{प्रघाटचग} = १९८४२६२८ \\
 \therefore \text{चग} = ९६४४१२६ \text{ एतदेव} \\
 \text{पर्वतौच्छयम् ।}
 \end{array}$$

(८) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अस्मिन् प्रश्ने प्रासादो वर्त्तते इत्यत्र “प्रासादे वर्त्तते” इत्यशुद्धिः ।  
 द-सर्वसो दक्षिणभागः । उ-उत्तरभागः । व-पूर्वभागे द-स्थानात् अ-  
 हस्तान्तरे तथा उ-स्थानात् क-हस्तान्तरे वंशमूलम् । अत्र वंदउ-कोणो  
 मेधेन ज्ञातः = का, दव = अ, उव = क ।

$$\therefore (३८) \text{ प्रक्रमतः कोज्याका} = \frac{अ^2 + दउ^2 - क^2}{२अ.दउ}$$

$$\therefore क^2 - अ^2 = दउ^2 - २अ.दउ.कोज्याका$$

$$\therefore क^2 - अ^2 + अ^2.कोज्या^2का$$

$$= दउ^2 - २अ.दउ.कोज्याका + अ^2.कोज्या^2का$$

$$क^2 - अ^2 (१ - कोज्या^2का)$$

$$\therefore \underline{+ मू} = दउ - अ.कोज्याका \therefore अ.कोज्याका + मू = दउ$$

$$\therefore दउ = अ.कोज्याका + \sqrt{क^2 - अ^2.ज्या^2का}$$

$$\text{या दउ} = अ.कोज्याका - \sqrt{क^2 - अ^2.ज्या^2का}$$

अत्र अ.कोज्याका = ग कल्प्यते, तदा प्रपादग

$$= \text{प्रघाटभ} + \text{प्रघाटकोज्याका} = \left\{ \begin{array}{l} २३०१०३०० \\ ९९६९३२१२ \\ \hline १२२७०३५१२ \end{array} \right\}$$

∴ ग = १८६३६१ । अथ क - अ, ज्याका एतन्मूलार्थं  
अ, ज्याका = च कल्प्यते तदा प्रघाटच

$$= \text{प्रघाटभ} + \text{प्रघाटज्याका} = \left\{ \begin{array}{l} २३०१०३०० \\ ९५५९८८२९ \\ \hline ११८६०९१२९ \end{array} \right\}$$

$$∴ \text{प्रघाटच} = २(११८६०९१२९) = २३७२१८२५८$$

$$∴ \text{च} = ५२७०९८$$

$$∴ \text{दृढ} = \text{अ.कोज्याका} + \sqrt{\text{क}^2 - \text{अ}^2 \text{ज्याका}}$$

$$= ग + \sqrt{\text{क}^2 - \text{च}^2} = ग + \sqrt{६४०० - ५२७०९८}$$

$$= ग + \sqrt{११२९८२} = ग + ३३६११$$

$$= १८६३६१ + ३३६११ = \left\{ \begin{array}{l} २१९९७२ \\ \text{वा } १५२७५ \end{array} \right\}$$

$$∴ \text{दृढ} = २१९९७२ \text{ वा } १५२७५$$

( ९ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र शा, शा शास्त्रमलीवृक्षौ, वे.स्था वेध्यस्थानम् । ततः अ, क  
भुजौ तदन्तर्गतकोणयैवे शाखाः । एभ्यो ग-भुजप्रमाणमन्वेष्टव्यम् ।

$$(३८) \text{ प्रक्रमतः कोज्यागा} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2}{२\text{अ.क.}}$$

$$\therefore २\text{अ.क.कोज्यागा} = \text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2$$

$$\therefore \text{ग}^2 = \text{अ}^2 + \text{क}^2 - २\text{अ.क.कोज्यागा}$$

$$\therefore \text{ग} = \sqrt{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - २\text{अ.क.कोज्यागा}}$$

$$\text{अत्र } २\text{अ.क.कोज्यागा} = \text{च}$$

$$\therefore \text{प्रघाटच} = \text{प्रघाट२} + \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटक} + \text{प्रघाटकोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} ३०१०३०० \\ २१७६०९१३ \\ २३०१०३०० \\ ९८०३९६९९ \end{array} \right\} \therefore \text{प्रघाटच} = १४५८२१२१२$$

$$\frac{१४५८२१२१२}{१४५८२१२१२}$$

$$\therefore \text{च} = ३८२०५११४$$

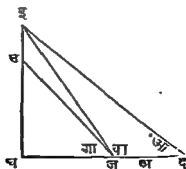
$$\therefore \text{ग} = \sqrt{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{२२५०० + ४०००० - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{६२५०० - ३८२०५११४}$$

$$= \sqrt{२४२९४८८६} = १५५८७$$

(१०) मश्रस्योत्तरम् ।



चउ = पर्वतौच्छयम्, तत्र उइ-स्तरम्, द-प्रथमवेध्यस्थानम् ।  
ज-पर्वताध-प्रदेशस्थं द्वितीयवेध्यस्थानम् । इदज-कोणः = भा = ३१° २०',  
इजच-कोणः = का = ४५° । ४२', सजच-कोणः = गा = ३५° । ३३'  
जद = अ = १५०, अत्र पर्वतौच्छयं स्तरमोच्छ्रितेति श्रुते अपेक्ष्ये ।

इजइ-त्रिभुजे जइद-कोणः = का - भा,

$$\therefore \text{इज} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा}}{\text{ज्या}(का - भा)}$$

इइज-त्रिभुजे इजउ-कोणः = का - गा

$$\therefore \text{इउ} = \frac{\text{इज} \times \text{ज्या}(का - गा)}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{ज्या}(का - गा)}{\text{ज्या}(का - भा) \times \text{कोज्यागा}}$$

$$\text{इजउ-त्रिभुज एव जउ} = \frac{\text{इज} \times \text{कोज्याका}}{\text{कोज्यागा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{कोज्याका}}{\text{ज्या}(का - भा) \times \text{कोज्यागा}}$$

$$\therefore \text{उच} = \frac{\text{जउ} \times \text{ज्यागा}}{१} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याभा} \times \text{कोज्याका} \times \text{ज्यागा}}{१ \times \text{ज्या}(का - भा) \times \text{कोज्यागा}}$$

अतयोः प्रधातगापकरूपे

$$\text{प्रधादइउ} = \text{प्रधादअ} + \text{प्रधादज्याभा} + \text{प्रधादज्या}(का - गा)$$

$$- \text{प्रधादज्या}(का - भा) - \text{प्रधादकोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + १७६०९१३ \\ + ९७१६०१६८ \\ + ९२४६०६९५ \\ + १९१३८१७७६ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} + ९३९४६७२९ \\ + ९९१०४१५५ \\ + १९३०५०८८४ \end{array} \right\}$$



$$= \left\{ \begin{array}{r} + १९०१३८१७७६ \\ - १९०३०५०८८४ \\ \hline - ०१६६९१०८ \\ + ०८३३०८९२ \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{प्रघाटइउ} = ०८३३०८९२ \therefore \text{इउ} = ६८०३६$$

$$\text{प्रघाटउच} = \text{प्रघाटअ} + \text{प्रघाटज्याआ} + \text{प्रघाटकोज्याका} +$$

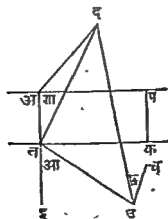
$$\text{प्रघाटज्यागा} - १० - \text{प्रघाटज्या(का - आ)} - \text{प्रघाटकोज्यागा}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + ०१७६०९१३ \\ + ९०७१६०१६८ \\ + ९०८४४११३७ \\ + ९०७६४४८४९ \\ \hline + २९०००७०६७ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{r} + १० \\ + ९०३९४६५२९ \\ + ९०९१०४१५५ \\ \hline + २९०३०५०६८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} + २९०५००७०६७ \\ - २९०३०५०६८४ \\ \hline ०१९५६३८३ \end{array} \right\}$$

$$\therefore \text{प्रघाटउच} = ०१९५६३८३ \therefore \text{उच} = १५६०८९८५$$

(११) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते अपकृत = नद्याकृतिभागः । यत्र अ अपरभागे,  
 अद = देवगृहौचन्यम् । तत्र = (वेधपारे) प्रवणभूप्रदेशः । तत्र उ =  
 उच्चभूप्रदेशचिह्नम्, त = तलप्रदेशचिह्नम् । अइ-रेखा त-विन्दुतः क्षि-  
 त्तिजसमानान्तरधरातलगतता अप-रेखोपरि तथा तक-रेखोपरि लम्बरूपा,  
 त स्थानात् प्रावण्यकोणः = आ, त-स्थानाद् देवमन्दिराप्रवेधेनोन्नतांशाः  
 = का, उ स्थानाद् देवमन्दिराप्रवेधेनोन्नतांशाः = गा, अतः अत नदी-  
 विस्तृतेस्तथा अद-मन्दिरौच्यमानस्य च हानमपेक्ष्यम् ।

अत्रेदमवधेयं यत् त-स्थानात् क्षितिजसमानान्तरधरातलं तदु-  
 धितदेवमन्दिराप्रगरेखां स्पृशेत् त-स्थानतस्तथा उ स्थानतश्च क्षिति-  
 समानान्तरधरातलान्तरादल्पं मन्दिरौच्यमिति ।

अत्रोपपत्तिः । तइ, उच-रेखे समानान्तरे तउ-रेखया छिन्ने,  $\angle$  इतउ  
 = आ =  $\angle$  तउच  $\therefore \angle$  तउच =  $\angle$  दतउ = आ - का =  $\angle$  तउद ।

अथ  $\angle$  दतउ =  $१८०^{\circ}$  - (आ + गा)

$$\therefore \angle$$

$$= १८०^{\circ} - (का + गा) \therefore \angle$$

$$= १८०^{\circ} - [१८०^{\circ} - (का + गा)] = का + गा$$

$$\therefore तद = \frac{तउ \times ज्या(आ - का)}{ज्या(का + गा)}$$

$$\therefore अत = \frac{तउ \times ज्या(आ - का) कोज्यागा}{१ \times ज्या(का + गा)}$$

$$अद = \frac{तउ \times ज्या(आ - का) ज्यागा}{१ \times ज्या(का + गा)}$$

अत्र तउ = अ

$\therefore$  अनयोः प्रपातमापन्नरूपे—

$$प्रपादभूत = प्रपादभ + प्रपादज्या(आ - का)$$

$$+ प्रपादकोज्यागा - १० - प्रपादज्या(का + गा)$$

अत्र उ-स्थानलघुः कोणः प्रावण्यम् = अ,  $\therefore \angle कभउ = आको$ ,  
उक्त त्रिभुजे (३८) प्रकृतम् :—

$$ज्याभा = \frac{अउ^2 + अक^2 - कउ^2}{२अउ.अक}, \text{ द्वितीयपदे, कोटिज्याया कृणत्वात्}$$

$$कउ^2 = अउ^2 + अक^2 + २अउ.अक. ज्याभा,$$

$$कउ = अइ - अक \therefore कउ^2 = अइ^2 - २अइ.अक + अक^2,$$

$$\therefore अइ^2 - २अइ.अक + अक^2 = अउ^2 + अक^2 + २अउ.अक.ज्याभा$$

$$\therefore अइ^2 - अउ^2 = २अइ.अक + २अउ.अक.ज्याभा \\ = अक २(अइ + अउ. ज्याभा)$$

$$\therefore अक = \frac{अइ^2 - अउ^2}{२(अइ + अउ. ज्याभा)}$$

अत्र हरे २(अइ + अउ. ज्याभा) द्वितीयखण्डस्य प्रघातमापक-  
रूपम् ।

$$\text{प्रघाटअउ + प्रघाटज्याभा}$$

$$= \left. \begin{array}{l} २०४१२०० \\ ९५३४०५१७ \end{array} \right\} = ९७३८१७१७$$

$$\therefore २(अइ + ५४९५) = २(३२ + ५४९५)$$

$$= २(३७४९५) = ७४९९०$$

$$\therefore अक = \frac{अइ^2 - अउ^2}{२(अइ + अउ. ज्याभा)} = \frac{१०२४ - २५६}{७४९९०}$$

$$= १०२४ \dots\dots$$

## (१३) मन्त्रस्योत्तरम् ।



कुत्रापि समानभूमौ स्थित्वा कस्य चिदुच्चभूमिपटस्य स्तम्भस्याप्र-  
मूलगतसूत्रोत्पन्नकोणो यदि तस्यामेव समानभूमौ स्थानान्तरे स्थित-  
वता विध्यता जनेन पूर्वविद्धाप्रमूलोत्पन्नकोणसमानः कोणः प्राप्तस्तदा  
स्तम्भप्रमाणरूपाधारे त्रिभुजद्वयमुत्पद्यते ययोः शीर्षद्वयनावाधारसं-  
मुखौ कोणौ समानावतस्तत् त्रिभुजद्वयमेकवृत्तान्तर्गतम् । इयमेव संस्था-  
ऽस्मिन् १३प्रश्नेऽप्युक्तोऽत्र प्रथमवेधस्थानम् (प), द्वितीयवेधस्थानम्  
(द), स्तम्भमूलम् (स), स्तम्भाग्रम् (अ), चैतेभ्यश्चतुर्भ्यो बिन्दुभ्य-  
श्चतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतम् । वेधस्थानान्तरम्  $पप = २०० = क$  । अग्रमूलो-  
त्पन्नकोणः  $\angle सपअ = \angle सदअ = अा = ८^{\circ} ४०'$  । स्तम्भप्रमाणम्  $= अअ$   
 $= १२० = अ$  ।

$$\therefore \text{अवपस-वृत्तव्यासार्धम्} \frac{\frac{अस}{२} \times १}{ज्याअा} = \frac{अस}{२ज्याअा}$$

$$= \frac{अ}{२ज्याअा} = कद,$$

$$\therefore कद^२ - जद^२ = कद^२ - \left( \frac{दप}{२} \right)^२ = कद^२ - \left( \frac{क}{२} \right)^२$$

$$= \frac{अ^२}{४ज्या^२अा} - \frac{क^२}{४} = \frac{१}{४} \left( \frac{अ^२}{ज्या^२अा} - क^२ \right)$$

$$= \text{चम}^2 \therefore \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{\text{ज्या}^2 \text{आ}} - \text{क}^2} = \text{चम}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{\text{ज्या}^2 \text{आ}} - \text{क}^2} - \frac{\text{अ}}{2} = \text{चम} - \text{सच}$$

$$\therefore \text{अस} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{\text{ज्या}^2 \text{आ}} - \text{क}^2} - \text{अ} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left( \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2} - \text{अ} \right\} \text{ इदमेव पूर्वतौच्यम् ।}$$

अत्र कोष्ठकान्तर्गतप्रथमखण्डस्य

प्रघातमापकरूपार्थं यदि  $\left( \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 = ३^2$  कल्प्यते

तदा प्रघादह = प्रघादअ - प्रघादज्याआ

$$+ ०७९१८१२$$

$$\frac{-९२२५०९१८}{०५४०८९४} \therefore \text{प्रघादह} = ०८५४०८९४$$

$$\therefore ३ = ७१४६४१९ \therefore ३^2 = ५१०७१३०२५२३५६१$$

$$\therefore \left( \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2 = ५१०७१३०२५ - ४००००$$

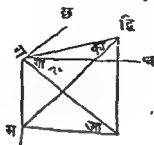
$$= ४७०७१३०२५$$

$$\therefore \sqrt{\left( \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2} = ६८६०८$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left( \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \right)^2 - \text{क}^2} - \text{अ} \right\} = १८३०४$$

इदमेव पूर्वतौच्यमानमिति ।

## (१४) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यते

अप्र मग = राजसदनोच्छ्रुतिः ।

प्र = प्रथमवृक्षमूलम् ।

दि = द्वितीयवृक्षमूलम् ।

प्र-दि = वृक्षमूलान्तरम् ।

गघ-गछ-रेखे अघरांशकोणज्ञानार्थं

पृष्ठस्या टिप्पण्यवलोक्यता ।

गमप्रत्रिभुजस्य जात्यत्वात् गप्र

गमद्वित्रिभुजस्यापि जात्यत्वात्

∴ गप्रदि-त्रिभुजे 'प्रदि' वृक्ष

प्रक्रमतः—

$$\frac{\text{गप्र}^2 + \text{गदि}^2 - \text{प्रदि}^2}{2\text{गप्र.गदि}} = \cos$$

$$\therefore \text{गप्र}^2 + \text{गदि}^2 - \text{प्रदि}^2 =$$

$$\therefore \text{प्रदि}^2 = \text{गप्र}^2 + \text{गदि}^2$$

$$= \frac{\text{गम}^2}{\text{उदा}^2\text{अ}} + \frac{\text{गम}^2}{\text{उदा}^2\text{क}}$$

$$= गम \left( \frac{१}{ज्या^२ भा} + \frac{१}{ज्या^२ का} - \frac{२कोज्यागा}{ज्याभा.ज्याका} \right)$$

$$\therefore प्रदि = गम \sqrt{\frac{१}{ज्या^२ भा} + \frac{१}{ज्या^२ का} - \frac{२कोज्यागा}{ज्याभा.ज्याका}}$$

$$= भ \sqrt{\frac{१}{ज्या^२ भा} + \frac{१}{ज्या^२ का} - \frac{२कोज्यागा \times १}{ज्याभा.ज्याका}}$$

अत्र हस्तादिमानानयनार्थं 'छगुरिक्त्य'-सारिणीतः प्रघातमापक-  
रूपायास्त खण्डचतुष्टयं कृतम् । अ,  $\frac{१}{ज्या^२ भा}$ ,  $\frac{१}{ज्या^२ का}$ ,  $\frac{२कोज्यागा}{ज्याभा.ज्याका}$  ।

$$\frac{१}{ज्या^२ भा} = क, \frac{१}{ज्या^२ का} = ग, \frac{२कोज्यागा}{ज्याभा.ज्याका} = घ$$

$\therefore$  प्रघाटक = २० - प्रघाट२ज्याभा, प्रघाटग = २० - प्रघाट२ज्याका,  
प्रघाटघ = प्रघाट२ + प्रघाटकोज्यागा + १० - प्रघाटज्याभा -  
प्रघाटज्याका ।

$$\therefore \text{प्रघाटक} = २० - २(८^{\circ}७०'९०''४९०) = २० - १७^{\circ}४१'८०''९८० \\ = २^{\circ}५८'१९०''२० \therefore क = ३२४^{\circ}२८'६२$$

$$\text{प्रघाटग} = २० - २(८^{\circ}७४'४५''३६०) = २० - १७^{\circ}४८'९०''७२० \\ = २^{\circ}५१'०९२''८० \therefore ग = ३८१^{\circ}८५'८२$$

$$\text{प्रघाटघ} = ३०१०३०० + ९^{\circ}९९३'७६''७९ + १० - ८^{\circ}७०'९०''४९० \\ - ८^{\circ}७४'४५''३६०$$

$$= २०^{\circ}२९४'७९''७९ - १७^{\circ}४५'३९''८५० = २^{\circ}८४'२१''२९$$

$$\therefore घ = ६९३'७६''९९$$

$$\therefore \text{प्रदि} = भ \sqrt{क + ग - घ}$$

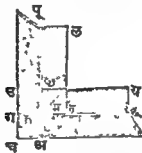
$$= १०० \sqrt{३२४^{\circ}२८'६२ + ३८१^{\circ}८५'८२ - ६९३'७६''९९}$$

$$= १०० \sqrt{७०६'१४''४४ - ६९३'७६''९९}$$

$$= 100 \sqrt{12.3764} = 100 \times 3.5167 \\ = 351.67 \dots \dots 1$$

प्रभ्रान्ते उत्तरम् ३५४-३४९ इदमशुद्धम् ।

(१५) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अत्र पूर्वा-परायता पूल-मितद्वादशहस्तोच्छ्रिता पूलतमू-भित्तिस्तथा द्वादशहस्तोच्छ्रितैव याम्योत्तरा छयदमू भित्तिरन्या पश्चिमदिशि संल-  
गाऽस्ति इष्टसमये पूर्वकपाले द्वयोर्भित्तयोश्छाये समानभूमौ पतिते ।  
ययोः पूर्वापरभित्तेश्छाया क-मितोत्तरस्यां दिशि पतिता तथा याम्यो-  
त्तरभित्तेश्छाया ग-मिता पश्चिमस्यां दिशि पतिता । अत्र रवेरुन्नतांशा-  
स्तत्र दिगंशाश्च के इति प्रश्नः । इह क-मिता भुजः, ग-मिता कोटिः,  
मूच-मितः कर्णः । वास्तविको भुजश्च क, ग-मिता कोटिस्ततो वास्तवि-  
की छाया मूच-मिता  $= \sqrt{k^2 + g^2}$  । अथ मूचभ-जात्यत्रिभुजे

$$\text{ज्या } \angle \text{चमूख} = \text{ज्यादि} = \frac{1 \times \text{चख}}{\text{मूच}} = \frac{1 \times \text{क}}{\sqrt{k^2 + g^2}}$$

$$\text{अत्र } \sqrt{k^2 + g^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} = 8.54$$

$$\therefore \text{ज्यादि} = \frac{1 \times \text{क}}{8.54} \therefore \text{प्रघातमापकरूपे}$$

$$\text{प्रघादज्यादि} = \text{प्रघातक} + 10 - \text{प्रघाद } 4$$

$$= 6020600 + 10 - 6969000 = 95030900$$



$$\therefore \text{पूर्वकपाले उत्तरा दिगंशाः} = ज्या^{-1} \cdot \frac{क}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

$$= ज्या^{-1} \cdot ९९०३०९०० = ५३^{\circ} ७' ४८''$$

अथोन्नतांशार्थमुपायः । पूर्वोक्तक्षेत्रे मूच-मितैव छाया भुजो द्वादश कोटिरनयोर्वर्गान्तरपदं कर्णः, एवं दृग्ज्या भुज उन्नतांशज्या शङ्कुः कोटिस्त्रिज्या कर्णस्थानयोः क्षेत्रयोः साजात्यं प्रसिद्धमतः

$$\frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{\text{ज्याउन्न}}{\text{ज्यादृ}} = \text{स्पवन्न} ।$$

$$\therefore \text{स्पवन्न} = \frac{\text{द्वाद}}{\text{छाया}} = \frac{अ}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

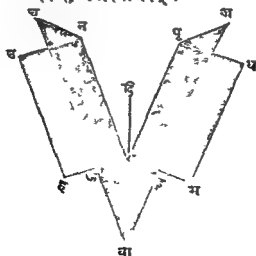
$$\therefore \text{प्रघाटस्पवन्न} = \text{प्रघाटअ} + १० - \text{प्रघाट५}$$

$$= १०७९१८१२ + १० - ६९८९७००$$

$$= १०३८०९११२ । \therefore \text{उन्नतांशाः} = स्प^{-1} \cdot \frac{अ}{\sqrt{क^2 + ग^2}}$$

$$= स्प^{-1} \cdot १०३८०९११२ = ६७^{\circ} २३' ४८''$$

(१६) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्पयतामिह पूर्वापरा अ-हस्रोच्छ्राया धमू-भित्तिरस्ति तथा तदु-  
च्छ्रायेवान्योत्तरभागे पू-पूर्वाधिहात आ-कोणान्तरे गता मूत्र-भित्तिरस्ति  
ययोश्छाया धमू-भित्तेर्दक्षिणतस्तया मूत्र-भित्तेरुत्तरपश्चिमतश्च मिलिता  
पूजवाचनमू-रूपा भूमौ पतिता । तत्र मूधभित्तेश्छायाविस्तृतिः मूह-रेखा  
क-मिता तथाऽन्यभित्तेश्छायाविस्तृतिः मूअ-रेखा ग-मिता, एते छाये तथा  
पूमूदि-कोणो वा तत्तुल्य इवाअ-कोणश्चेति त्रयं ज्ञात्वा दिगंशा वनतांशाश्च  
कियन्त इति प्रभः ।

अत्र धाअमू-कोणस्तथा वाअमू-कोणश्च नवत्यंशमितोऽतः अवाअमू-  
चतुर्भुजं धृत्तान्तर्गतम् । तत्र अवाअ-कोणः आ-मितोऽतः १८०-आ=  
८ इमूअ ।

$$\therefore - \text{कोज्याआ} = \frac{क^2 + ग^2 - अइ^2}{२कग}$$

$$\therefore अइ = \sqrt{क^2 + ग^2 + २क.ग.कोज्याआ}$$

सकचतुर्भुजस्य धृत्तान्तर्गतत्वात् ८ इमूअ = ८ इवामू, किन्तु

इवामू = ८ पूमूदि = दिगंशाः ।

$$\therefore ८ इवामू = \text{दिगंशाः} ।$$

$$\therefore \text{क्यादि} = \frac{\text{ज्याआ} \times क}{\sqrt{क^2 + ग^2 + २क.ग.कोज्याआ}}$$

$$\text{अत्र हरस्वरूपम्} = \sqrt{३^2 + ४^2 + २ \times ३ \times ४ \times \text{कोज्याआ}} ।$$

$$\therefore ह^2 = २५ + २४ \times \text{कोज्याआ} ।$$

$$= २५ + २४ \times ३८२६८३४$$

$$= २५ + ९१८४४०१६ = ३४१८४४०१६ ।$$

$$\therefore \sqrt{३४१८४४०१६} = ५८४६७...३$$

$$\therefore \text{क्यादि} = \frac{\text{उयाभा.क}}{५८४६७...} = \frac{२२३८७९५ \times ३}{५८४६७...}$$

$$= \frac{२७७१६३८५}{५८४६७...} = ४७४०५१७.....$$

$$\therefore \text{दिग्देशा उत्तराः} = २८^{\circ} । १७ ..... ।$$

अथोन्नतांशाः साध्यन्ते । वास्तविकी छाया वामू-मिता

$$= \frac{\text{क} \times १}{\text{क्यादि}} \text{ ( वामू-क्षेत्रे द्रष्टव्यम् )}$$

$$= \frac{\text{क} \times १ \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याभा}}}{\text{क्याभा.क}}$$

$$= \frac{१ \times \sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याभा}}}{\text{उयाभा}}$$

$$\therefore \text{स्पतन्त} = \frac{\text{अ.उयाभा}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2 + २\text{क.ग.कोज्याभा}}}$$

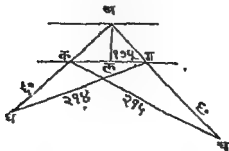
[ अत्र अ = १२ दस्ताः शङ्कुर्दस्तामकः कल्पितः ] ।

$$= \frac{१२ \times २२३८७९५}{५८४६७...} = \frac{११०८६५५४०}{५८४६७०००}$$

$$= \frac{११०८६५५४}{५८४६७००} = १८९६२०७१$$

$$\therefore \text{उन्नतांशाः पूर्वकपालीयाः} = ६३^{\circ} । ११ ..... ।$$

( १७ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



फलप्यते अवाक्यैरित्यः सरलप्रदेशः कग = १७५, कघ = ६०, गघ = २१४, गच = ९०, कच = २१५, एभ्यः अल-प्रमाणो नया विस्तारोऽपेक्ष्यः ।

$$(३८ प्रकगतः) कगच-त्रिभुजे कोज्या \angle कगच = \frac{कच^2 - कग^2 - गच^2}{२कग.गच}$$

$$= \frac{(२१५^2) - (१७५^2 + ९०^2)}{२ \times १७५ \times ९०} = \frac{७५००}{३१५००}$$

$$= .२३८०९५२.... \therefore \angle अगक = ७६^{\circ} १३' ३३''$$

$$एवम् कोज्या \angle गकघ = \frac{घग^2 - कघ^2 - कग^2}{२कघ.कग}$$

$$= \frac{(२१४^2) - (१७५^2 + ६०^2)}{२ \times १७५ \times ६०} = \frac{११५७१}{२१०००} = .५५१$$

$$\therefore \angle अकग = ५६^{\circ} ३३' ८'' \therefore \angle अगक + \angle अकग$$

$$= (७६^{\circ} १३' ३३'') + (५६^{\circ} ३३' ८'') = १३२^{\circ} ४६' ४१''$$

$$\therefore \angle कलग = ४७^{\circ} १३' १८''$$

$$\therefore अग = \frac{१७५ \times ज्या(५६^{\circ} ३३' ८'')}{ज्या(४७^{\circ} १३' १८'')}$$

$\therefore$  अगल-त्रिभुजऽनुपाततः

$$अल = \frac{१७५ \times ज्या(५६^{\circ} ३३' ८'') ज्या(७६^{\circ} १३' ३३'')}{१ \times ज्या(४७^{\circ} १३' १८'')}$$

$\therefore$  प्रघातमापकरूपम्—

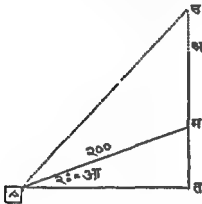
$$प्रघातअल = प्रघात१७५ + प्रघातज्या(५६^{\circ} ३३' ८'') + प्रघातज्या(७६^{\circ} १३' ३३'') - १० - प्रघातज्या(४७^{\circ} १३' १८'')$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} + २२४३०३८५ & - १० \\ + ९९८७३४१३ & - ९८६९६५३१ \\ + ९९२१३५७२ & - १९८६५६९३१ \\ + २२२१५१७३७० & \end{array} \right\}$$

$$= (+२२.१५१७३७० - १९.८६५६५३१) = २.२८६०८३९$$

∴ अल = १९३.२३३ हस्ताः, इदमेव पात्रप्रमाणम् । प्रभान्ते पात्र-  
प्रमाणम् = २००.८६२८ हस्ताः, इदमशुद्धम् ।

( १८ ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



कल्प्यतेऽत्र क्रमनिष्ठायाः सप्त-भूमेरुपदेशे स-स्थाने स्थितस्य  
हस्तशतोच्चिद्रूपे गज-वृक्षस्य मूलं स, अग्रम् = अ । वृक्षमूलप्रदेशात्  
प स्थाने हस्तशतद्वयान्तरे काचिद्वर्षा । अ-अग्रस्यानर्थयोर्वानरयोरेक-  
तरे वृक्षादयतां पयणभूम्याग्रवत् पय वर्षा गतः । अन्यतरश्च कि-  
ञ्चिदुर्ध्वं वर्णगत्या तां वर्षा गतः । द्वयोर्वानरयोर्गती यदि समाने  
कल्प्येते तदोर्ध्वनिमानं विवदिति प्रश्नः । अम = अ, मप = क, अत्र = य  
प्रभानुसारतः अम + मप = पत्र + अत्र ∴ पत्र = मप + अम - अत्र ।  
प्रायण्यकोणः ∠मपत = २०° = आ ∴ ∠पमत्र = ९० - आ = ७०°  
∴ ∠पमत्र = १८०° - (९०° - आ) = ९०° + आ

$$\text{अम (३८) प्रक्रमः कोणया } \angle \text{पमत्र} = \text{उपाया} = \frac{\text{पत्र}^2 - \text{अम}^2 - \text{मत्र}^2}{२\text{पम.मत्र}}$$

∴ पत्र = मप + मत्र + २उपाया.मप.मत्र । विष्णु

$$\text{पत्र} = \text{मप} + \text{अम} - \text{अत्र} \therefore \text{पत्र} = (\text{मप} + \text{अम} - \text{अत्र})$$

$$= \underline{मप} + \underline{अम} + \underline{अउ} + २पम.अम - २पम.अउ - २अम.अउ$$

$$= \underline{मप} + \underline{अउ} + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$= \underline{मप} + (\underline{अउ} + \underline{अम}) + २ज्याआ.मप(\underline{अउ} + \underline{अम})$$

$$= \underline{मप} + \underline{अउ} + \underline{अम} + २अउ.अम + २ज्याआ.मप(\underline{अउ} + \underline{अम})$$

$$\therefore २मप.अम - २मप.अउ - २अम.अउ$$

$$= २अउ.अम + २ज्याआ.मप(\underline{अउ} + \underline{अम})$$

$$= २अउ.अम + २ज्याआ.मप.अउ + २ज्याआ.मप.अम$$

$$\therefore २पम.अम - २ज्याआ.मप.अम$$

$$= २अउ.अम + २पम.अउ + २अम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$= ४अउ.अम + २पम.अउ + २ज्याआ.मप.अउ$$

$$२अम(\underline{मप} - ज्याआ.मप)$$

$$= \underline{अउ}(४अम + २मप + २ज्याआ.मप)$$

$$= २अम.मप(१ - ज्याआ)$$

$$= \underline{अउ} \{ ४अम + २मप(१ + ज्याआ) \}$$

$$\therefore \underline{अउ} = \frac{\underline{अम.मप}(१ - ज्याआ)}{२अम + मप(१ + ज्याआ)}$$

$$= \frac{\underline{अ.क}(१ - ज्याआ)}{२अ + क(१ + ज्याआ)}$$

अस्य गणितम् ।

$$\underline{उद्दिष्टमानम्} = \underline{अउ} = \frac{\underline{अ.क}(१ - ज्याआ)}{२अ + क(१ + ज्याआ)}$$

$$= \frac{१०० \times २०० (१ - ३४२०२०१)}{२ \times १०० + २०० (१ + ३४२०२०१)}$$

$$= \frac{२०००० (६५७९७९९)}{२०० + २०० + २०० (३४२०२०१)} = \frac{१३१५९५९८००}{४६८४०४०२}$$

$$= २८०९४५४५$$

## ( १९ ) मश्रस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते कम = सरलप्रदेशः = अ, मश = वंशः, मस्य मूल-  
विन्दुः = म, अत्रविन्दुः = अ, कम-प्रदेशस्य मध्यप्रदेशः = म-विन्दुः ।  
 $\angle मकअ = \angle मगअ = अ$  ।  $\angle मकम = का$ ,  $\angle कमअ = \angle मगअ$   
 $= \angle ममअ = ९०^\circ$ , सरलभूमितल्योपरि वंशस्य स्वरूपत्वात् ।

मश = वंशः = मा ।

$\therefore \frac{मा \cdot कोउया'भा}{उया'भा} = कम$ , अत्रम-तिभुजस्य समद्विबाहुत्वात्

सरलप्रदेशार्धविन्दुतो वंशमूलवर्धमेतं मशू-रेखा कम-रेख्योपरि स्वरूपत्वा

$$\therefore मम' = कम' - \left( \frac{कम}{२} \right)' = \frac{मा' \cdot कोउया'भा}{उया'भा} - \frac{कम'}{४}$$

$$= \frac{मा' \cdot कोउया'भा \times ४ - उया'भा \cdot कम'}{४ उया'भा} \quad । \quad अत्रम-तिभुजे$$

$$मम = \frac{मा \times कोउया'भा}{उया'भा} \quad \therefore मम' = \frac{मा' \times कोउया'का}{उया'का}$$

$$\therefore \frac{मा' \cdot कोउया'भा \times ४ - उया'भा \cdot कम'}{४ उया'भा} = \frac{मा' \times कोउया'का}{उया'का}$$

$$\therefore मा' \cdot ४ कोउया'भा \cdot उया'का - उया'भा \cdot उया'का \cdot कम'$$

$$= मा' \times ४ उया'भा \cdot कोउया'का$$

$$\therefore मा' \cdot ४ कोउया'भा \cdot उया'का - मा' \cdot ४ उया'भा \cdot कोउया'का$$

$$= ज्या^२ भा. ज्या^२ का. कग^२$$

$$= ४या^२ ( कोज्या^२ भा. ज्या^२ का - ज्या^२ भा. कोज्या^२ का )$$

$$= ४या^२ ( कोज्याभा. ज्याका + ज्याभा. कोज्याका ) \times$$

$$( कोज्याभा. ज्याका - ज्याभा. कोज्याका )$$

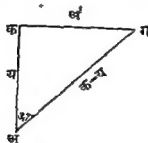
$$= ४या [ ज्या ( भा + का ) ] [ ज्या ( भा - का ) ]$$

$$\therefore या = \frac{\frac{कग^२}{२} ज्याभा. ज्याका}{\sqrt{ज्या ( भा + का ) ज्या ( भा - का )}}$$

$$= \frac{\frac{अ}{२} ज्याभा. ज्याका}{२ \sqrt{ज्या ( भा + का ) ज्या ( भा - का )}}$$

$$\therefore चम = दूरत्वम् = \frac{अ. कोज्याका. ज्याभा. ज्याका}{२ \sqrt{ज्या ( भा + का ) ज्या ( भा - का )}}$$

( २० ) प्रश्नस्योत्तरम् ।



अ, क, ग त्रीणि स्थानानि कल्प्यन्ते । तत्र अ-स्थानात् क-स्थानं प्राच्यां वर्तते । अ-स्थानात् ग-स्थानं च भा-अंशान्तरे क-स्थानतो दक्षिणभागे अ-दक्षिणमितान्तरे तिष्ठति । ग-स्थानं प्राप्यमस्ति किन्तु क-स्थानाद् दक्षिणगमनमशक्यमतो ग-स्थानं लिप्सुर्जनः क-स्थानात् अ-स्थानं प्रत्यक् गत्वा भा-अंशान्तरेण चलितो ग-स्थानं लब्धः । अत्र



तस्य चलनप्रदेशः अक + अग = क । अक = य .  
 .  
 अग = क - य ।

$$(३८ प्रकृतः) कोज्याभा = \frac{य^2 + (क - य)^2 - अ^2}{२य(य - क)}$$

$$\therefore २य(क - य)कोज्याभा = य^2 + (क - य)^2 - अ^2$$

$$\therefore अ^2 = य^2 + (क - य)^2 - २य(क - य)कोज्याभा$$

$$= य^2 + क^2 + य^2 - २क.य - २क.य.कोज्याभा + २य^2.कोज्याभा$$

$$= क^2 + २य^2 + २य^2.कोज्याभा - (२क.य + २क.य.कोज्याभा)$$

$$= क^2 + २य^2(१ + कोज्याभा) - २कय(१ + कोज्याभा)$$

$$= क^2 + (२य^2 - २कय)(१ + कोज्याभा)$$

$$\therefore २य^2 - २कय = \frac{अ^2 - क^2}{१ + कोज्याभा}$$

$$\therefore ४य^2 - ४क.य + क^2 = \frac{२अ^2 - २क^2 + क^2 + क^2.कोज्याभा}{१ + कोज्याभा}$$

$$= \frac{२अ^2 - क^2 + क^2.कोज्याभा}{१ + कोज्याभा} = \frac{२अ^2 - क^2(१ - कोज्याभा)}{१ + कोज्याभा}$$

$$\text{अत्र } १ + कोज्याभा = २कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}$$

$$\therefore २य - क = \frac{\sqrt{२अ^2 - क^2} \frac{१}{२} \text{ उआ}}{कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

$$\therefore य = \frac{१}{२} क + \frac{\sqrt{अ^2 - क^2} \frac{१}{२} \text{ उआ}}{२कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

एतदेव क-स्थानात् अ-स्थानस्यान्तरम् ।

$$\therefore क - य = \frac{१}{२} क - \frac{\sqrt{अ^2 - क^2} \frac{१}{२} \text{ उआ}}{२कोज्याभा \frac{१}{२} \text{ आ}}$$

एतत् अ-स्थानात् ग-स्थानस्यान्तरम् ।

पुस्तकप्राप्तिस्थानम्—

हरिकृष्णदास, मालिक

गुप्तबुरूडीपो, कचौरी गली

वनारस सिटी ।

## विज्ञापनम् ।

अस्तु निवेदनं समर्थनं सर्वेषां सज्जनानां पुरतो यदिह कार्यालये वेद-वेदाङ्ग- (व्याकरण ज्योतिष-निरुक्त धर्मशास्त्र-वेदभाष्य-छन्दःशास्त्र) षट्दर्शनपुराणोपपुराणेतिहास-रामायण-काव्य नाटक चम्पू-भट्टि-सर्वविषयकाणि सुख्यी पूना कलिकाता-काशीस्थ-यन्त्रालयेषु समुद्रितानि पुस्तकानि लभ्यन्ते ।

अत्रेदमवगच्छन्तु विद्वांसो यदस्मात् कार्यालयाद्यानि पुस्तकानि मेप्यन्ते तेषां प्रत्येकं पत्रं चावलोक्य देवात् कष्ट-कादिदोषतो यदि कुत्रापि पत्र वैकृत्यादि प्राप्यते तदा तत् ततो निरस्य तत्स्थानेऽन्यत् सुदृढ संनिवेश्य मनोहराकारे समुल्लिखितस्थानेषु समुचितमूल्येनैव सावधानतया पुस्तकानि “भी. पी.” द्वारा मेप्यन्ते यथाऽस्मद्ग्राहकाणां कथमपि हानिर्न भवेत् । सकृद्व्यवहारत एव वणिजः सत्यताऽभिलक्ष्यतेऽलमधिकप्रशंसया किन्त्वयं प्रार्थना यत् पुस्तकलिप्सुना स्वनाम-ग्राम-‘पो.आ.-जिला’ एतत् सुस्पष्ट स्वपत्रे लेखनीयम् ।

पुस्तकप्राप्तिस्थानम्

{

श्रीहरिकृष्णदास,  
मालिक, “गुप्तबुद्धिपो”  
कचोरीगली, बनारस सिटी ।